

2020~2021 学年度第二学期高二期末数学试卷

数学

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | |2x - 1| < 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. (1, 2) B. (-1, 2) C. $(-\infty, 2)$ D. (-1, 1)

2. 若 $(1-x)^{2021} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2021}x^{2021}$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_{2021} \cdot 3^{2021}$ 的值为

- A. $-1 + 2^{2021}$ B. $1 + 2^{2021}$ C. -2^{2021} D. 2^{2021}

3. 草木葱茏, 绿树成荫, 鸟语花香, 空气清新是我们梦寐以求的家园. 为了改善生活环境, 今年 3 月份某学校开展了植树活动, 根据收集到的数据 (如下表), 由最小二乘法求得回归方程 $\hat{y} = 0.66x + 55.2$ 后, 由于某种原因其中一个数据被损坏 (表格中 ?? 处数据), 请你推断出该数据的值

植树棵树 x (单位: 棵)	10	20	30	40	50
花费时间 y (单位: 分钟)	62	68	75	??	89

- A. 81 B. 81.7 C. 81.6 D. 82

4. 一不透明的口袋内装有若干个形状、质地完全相同的红色和黄色小球. 若事件“第一次摸

出红球且第二次摸出黄球”的概率为 $\frac{2}{5}$, 事件“在第一次摸出红球的条件下, 第三次摸出黄球”

的概率为 $\frac{1}{2}$, 则事件“第一次摸出红球”的概率为

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 现有 4 位学生干部分管班级的三项不同的学生工作, 其中每一项工作至少有一人分管且每人只能分管一项工作, 则这 4 位学生干部不同的分管方案种数为

- A. 18 B. 36 C. 72 D. 81

6. 某航空母舰的飞行甲板后部有四套安全着陆装置 A, B, C, D , 降落的飞行员着陆时, 启用哪套安全着陆装置按就近原则, 例如: 当某次降落的飞行员着陆时离装置 A 最近, 首选启用装置 A , 若成功启用装置 A , 则在此次着陆过程中不启用其它三套装置, 若装置 A 出现故障则启用除装置 A 之外的最近装置, 依此类推只有当四套安全着陆装置同时出现故障时, 降落的飞行员着陆失败需拉起复飞. 经过对多次试验数据统计分析显示: 成功启用装置 A 的概率为 25%, 成功启用装置 B 或装置 C 的概率为 54%, 降落的飞行员着陆失败需拉起复飞的概率约为 1%. 现有一架战机着舰演练 100 次, 则成功启用装置 D 的次数约为

- A. 5 B. 15 C. 20 D. 25

7. 已知关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$, 则不等式

$$\frac{ax+b}{cx+a} > 0 \text{ 的解集为}$$

A. $\left(-\frac{1}{3}, 4\right)$

B. $\left(-4, -\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

D. $(-\infty, -4) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

8. 若点 A, B 分别是函数 $y = x - 4e^x$ 与 $y = 3 - 3x$ 图象上的动点(其中 e 是自然对数的底数),

则 AB 的最小值为

A. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{49}{10}$

C. $\sqrt{17}$

D. 17

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目

要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若 $a > b$, 则下列结论一定成立的是

A. $2^a > 2^b$

B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. $\sqrt{b} < \sqrt{a}$

D. $ac > bc (c \neq 0)$

10. 一个不透明的口袋内装有若干张大小、形状完全相同的红色和黄色卡片，现从口袋内随机抽取卡片，每次抽取一张，随机变量 ξ 表示抽到黄色卡片的张数，下列说法正确的有

A. 若口袋内有 3 张红色卡片，6 张黄色卡片，从袋中不放回地抽取卡片，则第一次抽到红色

卡片且第二次抽到黄色卡片的概率为 $\frac{1}{4}$

B. 口袋内有 3 张红色卡片，6 张黄色卡片，从袋中有放回地抽取 6 次卡片，则随机变量

$\xi \sim B\left(6, \frac{2}{3}\right)$ ，且 $D(2\xi - 1) = \frac{8}{3}$

C. 若随机变量 $\xi \sim H(6, M, N)$ ，且 $E(\xi) = 4$ ，则口袋内黄色卡片的张数是红色卡片张数的 2 倍

D. 随机变量 $\xi \sim B(3, p)$ ， $\eta \sim N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(\xi \geq 1) = 0.784$ ， $P(2 < \eta < 4) = p$ ，则

$P(\eta < 0) = 0.1$

11. 已知命题 $p: x^2 + 3x - 4 < 0$ ；命题 $q: 2ax - 1 < 0$ 若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的值是

A. $-\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

12. 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$ ， $F(x) = f(x) - f(2 - x)$ ，函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的导数分

别为 $f'(x)$ ， $F'(x)$ ，则

A. $f(x)$ 的最大值为 1

B. $F'(x) = f'(x) - f'(2 - x)$

C. $F'(x) = f'(x) + f'(2 - x)$

D. 当 $x \in (0, 1]$ 时， $F(x) \leq 0$ 恒成立

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y = \ln(2x + 1)$ 在 原点处的切线方程为 _____.

14. 已知圆柱的体积为 $16\pi \text{ dm}^3$ ，则该圆柱的表面积的最小值为 _____ dm^2 .

15. 若 $\left(mx^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中 x^3 的系数为 $-\frac{5}{2}$ ，则 m 的值为 _____，二项展开式中系数最大的为 _____.

16. 某人投篮命中的概率为 0.3，投篮 15 次，最有可能命中 _____ 次.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 有三个条件：①函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$ ，且 $a=1$ ；② $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极大值 $\frac{11}{6}$ ；③函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线方程为 $4x-2y-7=0$ ，这三个条件中，请选择一个合适的条件将下面的题目补充完整（只要填写序号），并解答本题.

题目：已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + 2x + b$ 存在极值，并且_____.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当 $x \in [1,3]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值.

18. (12 分) 近年来，我国肥胖人群的规模急速增长，肥胖人群有很大的心血管安全隐患目前，国际上常用身体质量指数 (Body mass Index，缩写 BMI 来衡量人体胖瘦程度以及是否健康，其计算公式是

$$BMI = \frac{\text{体重(单位: kg)}}{\text{身高}^2(\text{单位: m}^2)}$$

中国成人的 BMI 数值标准为： $BMI < 18.5$ 为偏瘦； $18.5 \leq BMI < 23.9$ 为正常；

$24 \leq BMI < 27.9$ 为偏胖； $BMI \geq 28$ 为肥胖.

为了解某学校教职工的身体肥胖情况，研究人员通过对该学校教职工体检数据分析，计算得到他们的 BMI 值统计如下表：

	男教职工人数	女教职工人数	合计
偏瘦 ($BMI < 18.5$)	12	16	28
正常 ($18.5 \leq BMI < 23.9$)	35	23	58
偏胖 ($24 \leq BMI < 27.9$)	18	6	24
肥胖 ($BMI \geq 28$)	15	5	20
合计	80	50	130

(1) 根据上述表格中的数据，计算并填写下面的 2×2 列联表，并回答是否有 90% 的把握认为肥胖 ($BMI \geq 28$) 与教职工性别有关.

	$BMI < 27.9$	$BMI \geq 28$	合计
男教职工			
女教职工			
合计			

(2) 在 $BMI \geq 24$ 的教职工中, 按男女比例采用分层抽样的方法随机抽取 8 人, 然后从这 8 名教职工中随机抽取 2 人, 问被抽到的 2 人中至少有一名女教职工的概率为多少?

参考数据:

$P(K^2 > k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

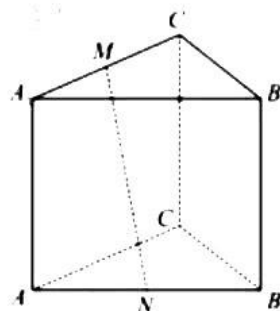
19. (12分) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别为线段 A_1C_1 与 AB 的中点.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 若侧面 BB_1C_1C 为矩形, 底面 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$AC = BC = 2$, MN 与侧面 AA_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 与底面

ABC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求二面角 $M - AB - C$ 的正切值.



20. (12分) (1) 解不等式 $\frac{2x+1}{2-x} \geq 1$;

(2) 对于题目：已知 $m > 0$, $n > 0$, 且 $mn = 1$, 求 $A = m + 2n + \frac{4}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值.

同学甲的解法：因为 $m > 0$, $n > 0$, 所以 $\frac{4}{m} > 0$, $\frac{2}{n} > 0$, 从而：

$$m + 2n + \frac{4}{m} + \frac{2}{n} = \left(m + \frac{4}{m}\right) + \left(2n + \frac{2}{n}\right) \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{4}{m}} + 2\sqrt{2n \cdot \frac{2}{n}} = 8.$$

所以 A 的最小值为 8.

同学乙的解法：因为 $m > 0$, $n > 0$,

$$\text{所以 } m + 2n + \frac{4}{m} + \frac{2}{n} = m + 2n + \frac{2(m+2n)}{mn} = 3(m+2n) \geq 6\sqrt{m \cdot 2n} = 6\sqrt{2}.$$

所以 A 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

① 请对两位同学的解法正确性作出评价；

② 为巩固学习效果，老师布置了另外一道题，请你解决：

已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $(a+1)(b+2) = 6$, 求 $B = a + b + \frac{6}{a+1} + \frac{12}{b+2}$ 的最小值.

21. (12分) 为了促进学生加强体育锻炼，提升身体素质，某校决定举行羽毛球单打比赛甲和乙进入了决赛，决赛采用五局三胜制（有一方先胜三局即赢得比赛，比赛结束），每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，且每局比赛结果互不影响.

(1) 求决赛只比赛三局就结束的概率；

(2) 假设比赛规定：每局胜者得 2 分，负者得 -1 分.

① 求甲得 5 分的概率；

② 设甲的分数为 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x} + ax$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 若 $a > \frac{1}{e}$, 请判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 1$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》