山东师大附中 2019 级高三开学考试

数学试题

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分,共 4 页,满分为 150 分,考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号等信息填写在答题卡规定的位置上.

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.

3. 第Ⅱ卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案,不得使用涂改液、胶带纸、修正带和其它笔.

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M=\left\{x\in Z\middle|2\le 2^x<8\right\}$, $N=\left\{x\middle|x<a\right\}$,若 $M\cap N$ 有且仅有 1 个元素,则实数 a 的取值范围是

A. $(0,1]$　　B. $[0,1]$　　C. $(1,2]$　　D. $[1,2]$

2. 命题"任意 $x\in Z,x^2+2x+m\le 0$"的否定是

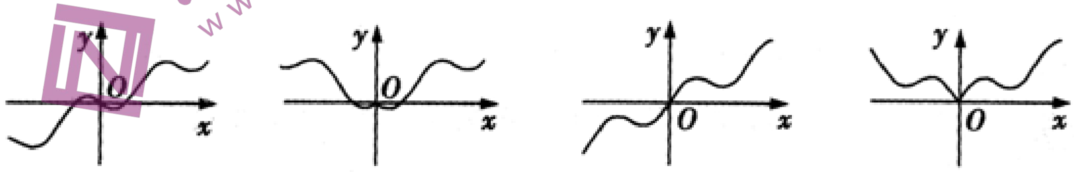
A. 存在 $x\in Z,x^2+2x+m>0$　　B. 不存在 $x\in Z,x^2+2x+m>0$

C. 对任意 $x\in Z,x^2+2x+m\le 0$　　D. 对任意 $x\in Z,x^2+2x+m>0$

3. 已知复数 $z=\dfrac{1-5i}{1-i}$,则复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A. 2　　B. -2　　C. $2i$　　D. $-2i$

4. 已知 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)$, $f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数,则 $f'\left(x\right)$ 的图象是



A　　B　　C　　D

5. 甲乙两个物理兴趣小组在实验室研究某粒子运动轨迹. 共同记录到粒子的 13 个位置的坐标信息如下表：

x	-0.93	-0.82	-0.77	-0.61	-0.55	-0.33	-0.27	0.10	0.42	0.58	0.64	0.67	0.76
y	-0.26	-0.41	-0.45	0.45	-0.60	-0.67	-0.68	-0.71	0.64	0.55	0.55	0.53	0.46

甲小组根据表中数据, 直接对 y,x 作线性回归分析, 得到：

回归方程为 $\hat{y}=0.5993x+0.005$, 相关指数 $R^2=0.4472$；

乙小组先将数据依变换 $u=x^2$, $v=y^2$ 进行整理, 再对 v,u 作线性回归分析, 得到：

回归方程为 $\hat{v}=-0.5006u+0.4922$, 相关指数 $R^2=0.9375$

根据统计学知识, 下列方程中最有可能是该粒子运动轨迹方程的是

A. $0.5993x-y+0.005=0$　　B. $0.5006x+y-0.4922=0$

C. $\dfrac{0.5006x^2}{0.4922}+\dfrac{y^2}{0.4922}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{0.4922}+\dfrac{0.5006y^2}{0.4922}=1$

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2x)$, 当 $x\in[1,2)$, $f(x)=\ln x$, 若在区间 $[1,4)$ 内,

函数 $g(x)=f(x)-ax(a\neq 0)$ 有两个不同零点, 则实数 a 的取值范围是

A. $\left(0,\dfrac{\ln 2}{4}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\ln 2}{4},\dfrac{1}{2e}\right)$　　C. $\left(\dfrac{\ln 2}{4},\dfrac{1}{e}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\ln 2}{4},\dfrac{\ln 2}{2}\right)$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 满足 $AB=2$, $\angle ACB=90^\circ$, PA 为球 O 的直径且 $PA=4$, 则点 P 到底面 ABC 的距离为

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

8. 设实数 $m>0$, 若对任意的 $x\geq e$, 不等式 $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$ 恒成立, 则 m 的最大值是

A. $\dfrac{1}{e}$　　B. $\dfrac{e}{3}$　　C. e　　D. $2e$

二、多项选择题（本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分）

9. 将曲线 $C_1: y=\sin x$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 $C_2: y=f(x)$, 则下列结论正确的是

A. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f(x)$

C. $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 2 个零点　　D. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增

10. 不透明的口袋内装有红色、绿色和蓝色卡片各 2 张, 一次取出 2 张卡片, 则与事件“2 张卡片都为红色”互斥而非对立的事件是

A. 2 张卡片不都是红色　　B. 2 张卡片恰有一张红色

C. 2 张卡片至少有一张红色　　D. 2 张卡片都为绿色

11. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点, 则下列结论正确的是

A. 以线段 AB 为直径的圆与直线 $x=-\frac{1}{2}$ 相交　　B. 以线段 BM 为直径的圆与 y 轴相切

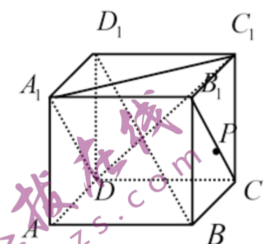
C. 当 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 时, $|AB|=\frac{9}{2}$　　D. $|AB|$ 的最小值为 4

12. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 在线段 B_1C 上运动,则下列结论正确的是

A. 直线 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D　　B. 三棱锥 $D-A_1C_1P$ 的体积为定值

C. 异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $[30°,90°]$

D. 直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



第 II 卷

三、填空题（本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分）

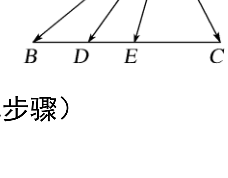
13. 在 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数是____________.

14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}+a_n=2n$, 则 $a_{2021}=$_________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3, x\le 0\\ 2^{x+1}+1, x>0\end{cases}$, 则不等式 $f(2x+3)<f(x^2+4x)$ 的解集为_______.

16. 如图, $\triangle ABC$ 中点 D,E 是线段 BC 上两个动点, 且 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

则 $\frac{x+9y}{xy}$ 的最小值为________.



四、解答题（本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3, a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^n\left(n\in N^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）令$b_n=n\cdot a_n$, 求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

18.(12 分) 在锐角$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$2b\cos C=2a-c$.

（1）求角B;

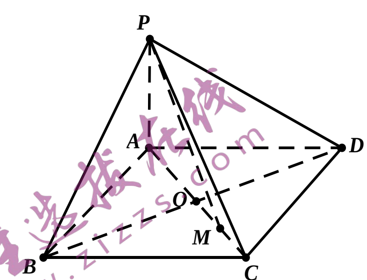
（2）求$\sin A\sin C$的取值范围.

19. (12 分) 一个盒子内装有6张卡片, 每张卡片上面写着1个数字, 这6个数字各不相同, 且奇数有3个, 偶数有3个. 每张卡片被取出的概率相等.

（1）如果从盒子中一次随机取出2张卡片, 并且将取出的2张卡片上的数字相加得到一个新数, 求所得新数是奇数的概率;

（2）现从盒子中一次随机取出1张卡片, 每次取出的卡片都不放回盒子, 若取出的卡片上写着的数是偶数, 则停止取出卡片, 否则继续取出卡片. 设取出了ξ次才停止取出卡片, 求ξ的分布列和数学期望.

20. (12 分) 已知四棱锥$P-ABCD$中, $PA\perp$平面$ABCD$, 且$PA=a$, 底面$ABCD$是边长为b的菱形, $\angle ABC=60^\circ$.



（1）求证：平面$PBD\perp$平面PAC;

（2）设AC与BD交于点O, M为OC中点, 若二面角$O-PM-D$的正切值是$2\sqrt{6}$, 求$a:b$的值.

21. (12 分) 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，离心率为$\dfrac{1}{2}$，短轴长为$2\sqrt{3}$. A_1,A_2为椭圆的左右顶点，P为椭圆上任一点（不同于A_1,A_2），直线A_1P,A_2P分别与直线$l:x=4$交于M,N两点.

（1）求椭圆C的标准方程;

（2）若F为椭圆右焦点，试判断$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$是否为定值，若为定值，求出该值；若不为定值，请说明理由.

22. (12 分) 已知函数$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax$（$a\in$ R）.

（1）若函数$f\left(x\right)$在 R 上是增函数, 求实数a的取值范围;

（2）如果函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2$恰有两个不同的极值点$x_1,x_2$, 证明：$\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$.