绝密★启用并使用完毕前

2021 年 7 月高二期末学情检测

数学试题

本试卷共 4 页，22 题，全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡的指定位置上.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.非选择题的作答：用黑色签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.$(2x+1)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是

A.21　　B.42　　C.84　　D.168

2.下列求导数运算正确的是

A. $(\frac{1}{x})'=x^{-2}$　　B. $(2^x)'=2^x\ln 2$　　C. $(\ln 2x)'=\frac{1}{2x}$　　D. $(\sin\frac{\pi}{6})'=\cos\frac{\pi}{6}$

3.根据如下样本数据：

x	3	5	7	9
Y	6.5	5	4	2.5

得到经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则

A. $\hat{a}<0,\hat{b}<0$　　B. $\hat{a}>0,\hat{b}>0$　　C. $\hat{a}<0,\hat{b}>0$　　D. $\hat{a}>0,\hat{b}<0$

4.甲、乙、丙、丁、戊五个人站成一排，甲乙不相邻的排列方法有

A.12 种　　B.48 种　　C.72 种　　D.120 种

5.目前国家为进一步优化生育政策，实施一对夫妻可以生育三个子女政策.假定生男孩和生女孩是等可能的，现随机选择一个有三个小孩的家庭，如果已经知道这个家庭有女孩，那么在此条件下该家庭也有男孩的概率是

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{6}{7}$

6.济南市为实现“节能减排，绿色出行”，自 2018 年起大力推广新能源出租车、网约车.截止目前，全市出租车已有 38% 换装为新能源汽车，网约车中更是有 51% 的车辆为新能源汽车.某人从泉城广场通过手机软件打车功能，同时呼叫出租车与网约车，该软件平台向附近 42 辆出租车和 21 辆网约车推送接单信息(假设平台呼叫范围内新能源车比例与全市区域相同，每位司机接单机会相同)，该乘客被新能源汽车接单的概率约为

A. 42.3%　　B. 44.5%　　C. 46.7%　　D. 50%

7.孪生素数猜想是希尔伯特在1900年提出的23个数学问题之一，2013年华人数学家张益唐证明了孪生素数猜想的一个弱化形式，可以直观的描述为：存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$ 是素数．素数对 $(p,p+2)$ 称为孪生素数对．从8个数对 $(3,5)$，$(5,7)$，$(7,9)$，$(9,11)$，$(11,13)$，$(13,15)$，$(15,17)$，$(17,19)$ 中任取3个，设取出的孪生素数对的个数为 X，则 $E(X)=$

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

8.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)>1$，$f(1)=-1$，则 $f(x)>x-2$ 的解集为

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、选择题：本题共4小题．每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9.在 $(\frac{1}{x}-x)^6$ 的展开式中，下列说法正确的是

A.常数项是20　　B.第4项的二项式系数最大

C.第3项是 $15x^2$　　D.所有项的系数的和为0

10.目前有望战胜新冠病毒的有效策略之一就是疫苗的接种预防．装疫苗的玻璃瓶用的不是普通玻璃，而是中性硼硅玻璃，这种玻璃有较好的平均线膨胀系数（简称：膨胀系数）．某玻璃厂有两条硼硅玻璃的生产线，其中甲生产线所产硼硅玻璃的膨胀系数 X_1 服从正态分布 $N(4.4,0.09)$，乙生产线所产硼硅玻璃的膨胀系数 X_2 服从正态分布 $N(4.7,0.01)$，则下列选项正确的是

附：若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$．

A.甲生产线硼硅玻璃膨胀系数范围在 $(4.1,4.7)$ 的概率约为0.682 7

B.甲生产线所产硼硅玻璃的膨胀系数比乙生产线所产硼硅玻璃的膨胀系数数值更集中

C.若用于疫苗药瓶的硼硅玻璃膨胀系数不能超过5，则乙生产线生产的硼硅玻璃符合标准的概率更大

D.乙生产线所产的硼硅玻璃膨胀系数小于4.5的概率与大于4.8的概率相等

11.已知由样本数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,3,4,5,6$ 求得的经验回归方程为 $\hat{y}=2x+1$，且 $\bar{x}=3$．现发现一个样本数据 $(8,12)$ 误差较大，去除该数据后重新求得的经验回归直线 l 的纵截距依然是1，则下列说法正确的是

A.去除前变量 x 每增加1个单位，变量 y 一定增加2个单位

B.去除后剩余样本数据中 x 的平均数为2

C.去除后的经验回归方程为 $\hat{y}=2.5x+1$

D.去除后相关系数 r 变大

12.已知函数 $f(x)=\ln x-ax$，a 为常数，若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，则下列说法正确的是

A. $x_1\ln x_2=x_2\ln x_1$　　B. $2e<x_1+x_2<e^2$

C. $x_1x_2>e^2$　　D. $\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13.已知随机变量 X 的分布如下表，则 $D(X)=$________．

X	0	1
P	a	$2a$

14.为调查某企业年利润 Y（单位：万元）和它的年研究费用 x（单位：万元）的相关性，收集了5组成对数据 (x,y)，如下表所示：

x	1	2	3	4	5
Y	50	60	70	80	100

由上表中数据求得 Y 关于 x 的经验回归方程为 $y=12x+a$，据此计算出样本点 $(4,80)$ 处的残差（残差＝观测值－预测值）为________.

15.为庆祝中国共产党成立100周年，某学校举行文艺汇演.该校音乐组9名教师中3人只会器乐表演，5人只会声乐表演，1人既会器乐表演又会声乐表演，现从这9人中选出3人参加器乐表演，4人参加声乐表演，每人只能参加一种表演，共有________种不同的选法.(用数字作答)

16.已知函数 $f(x)=e^{2x}$，$g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，若 $f(x)$ 图象向下平移 $k(k>0)$ 个单位后与 $g(x)$ 的图象有交点，则 k 的最小值为________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10分)

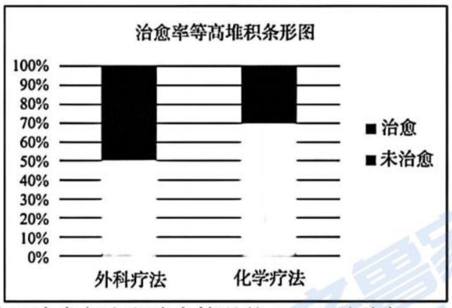
已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 在 $x=1$ 处有极值，其图象经过点 $(2,3)$，且 $f'(0)=-1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)求函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程.

18.(12分)

为了研究某种疾病的治愈率，某医院对100名患者中的一部分患者采用了外科疗法，另一部分患者采用了化学疗法，并根据两种治疗方法的治愈情况绘制了等高堆积条形图，如下：



(1)根据图表完善以下关于治疗方法和治愈情况的 2×2 列联表：

疗法	疗效		合计
	未治愈	治愈	
外科疗法			
化学疗法		18	
合计			100

(2)依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，分析此种疾病治愈率是否与治疗方法有关.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（如需计算 χ^2，结果精确到0.001）

χ^2 独立性检验中常用小概率值和相应的临界值

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.(12 分)

某商场举办店庆活动，消费者凭借购物发票进行现场抽奖.抽奖盒中装有 3 个红球和 2 个黄球，这些球除颜色外完全相同.抽奖规则为：抽奖者一次从中摸出 2 个小球，若摸到 2 个红球就中奖，否则均为不中奖.小球用后放回盒子，下一位抽奖者继续抽奖.

(1)求每一位抽奖者中奖的概率；

(2)现有甲、乙、丙三人依次抽奖，用 X 表示中奖的人数，求 X 的分布列及均值.

20.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x[ax^2-(3a+1)x+3a+2]$.

(1)当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)当 $a<1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

21.(12 分)

2021 年新高考数学试卷中多选题规定：在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.小明在做多选题的第 11 题、第 12 题时通常有两种策略：

策略 A：为避免有选错的得 0 分，在四个选项中只选出一个自己最有把握的选项，将多选题当作“单选题”来做.这种策略每个题耗时约 3 分钟.

策略 B：争取将该问题得 5 分，选出自己认为正确的全部选项.这种策略每个题耗时约 6 分钟.

某次数学考试临近，小明通过前期大量模拟训练得出了其各种策略下 11 题和 12 题的作答情况如下：

第 11 题：如果采用策略 A，选对一个选项的概率为 0.8，采用策略 B，部分选对的概率为 0.5，全部选对的概率为 0.4；第 12 题：如果采用策略 A，选对一个选项的概率为 0.7，采用策略 B，部分选对的概率为 0.6，全部选对的概率为 0.3.

如果这两题总用时超过 10 分钟，其他题目会因为时间紧张少得 2 分.假设小明作答两题的结果互不影响.

(1)若小明同学此次考试中决定 11 题采用策略 B、12 题采用策略 A，设此次考试他 11 题和 12 题总得分为 X，求 X 的分布列；

(2)小明考前设计了以下两种方案：

方案 1：11 题采用策略 B，12 题采用策略 A；方案 2：11 题和 12 题均采用策略 B.

如果你是小明的指导老师，从整张试卷尽可能得分更高的角度出发，根据小明的实际情况，你赞成他的第几种方案，并说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$.

(1)若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2)求证：当 $n\in N_+$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+e>\ln(n+1)+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 成立.

高中二年级学情检测

数学试题参考答案

一、单项选择：1-4　CBDC　5-8．DAC B

二、多项选择：9．BD　10．AC　11．BCD　12．ACD

三、填空题：13．$\frac{2}{9}$　14．-4　15．30　16．2

四、解答题

17．【解析】

(1)因为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$，

所以 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$．

由题意可得，$\begin{cases}3a+2b+c=0\\8a+4b+2c+1=3\\c=-1\end{cases}$

解得，$a=1,b=-1,c=-1$．

经检验，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 在 $x=1$ 处有极值；

即 $f(x)=x^3-x^2-x+1$．

(2)因为 $f'(x)=3x^2-2x-1$，

所以 $f'(-1)=4$，

因为切线过 $(-1,0)$，

所以 $y=4(x+1)$

即所求切线方程为 $4x-y+4=0$．

18．【解析】

（1）由题意可知：

疗法	疗效		合计
	未治愈	治愈	

外科疗法	20	20	40
化学疗法	42	18	60
合计	62	38	100

(2)解：零假设为H_0：是否治愈与治疗方法无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{100\times(20\times18-20\times42)^2}{40\times60\times62\times38}\approx4.075>3.841=x_{0.05}$$

根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，我们能推断H_0不成立，即认为是否治愈与治疗方法有关联，此推断犯错误的概率不大于0．05.

19.【解析】

（1）设A="抽奖者获奖"，则由古典概型可得

$P(\mathrm{A})=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$.

（2）(法I)

由题意$X\sim B(3,\frac{3}{10})$，

$P(X=k)=C_3^k(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{3-k},k=0,1,2,3$.

$E(X)=3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

(法II)

由题意可知，随机变量X的可能取值为0,1,2,3

$P(X=0)=C_3^0(\frac{3}{10})^0(1-\frac{3}{10})^3=0.343$,

$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{10})^1(1-\frac{3}{10})^2=0.441$,

$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{10})^2(1-\frac{3}{10})^1=0.189$,

$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{10})^3(1-\frac{3}{10})^0=0.027$.

于是X的分布列如下：

X	0	1	2	3

P	0.343	0.441	0.189	0.027

$E(X)=3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

20.【解析】

(1)当$a=2$时，由$f'(x)=2e^x(x-\frac{1}{2})(x-1)$，

令$f'(x)>0$,得$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{2})$和$(1,+\infty)$上分别单调递增；令$f'(x)<0$,得$\frac{1}{2}<x<1$，则$f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减；$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的情况如下：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$5\sqrt{e}$	↘	3e	

所以$x=\frac{1}{2}$时$f(x)$取得极大值$5\sqrt{e}$，$x=1$时$f(x)$取得极小值$3e$.

(2)$f'(x)=e^x(ax-1)(x-1)$

（i）当$a=0$时，由$f'(x)=e^x(1-x)$，得$x<1$时，$f'(x)>0$；$x>1$时，$f'(x)<0$

则$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

（ii）当$a<0$时，由$f'(x)=ae^x(x-\frac{1}{a})(x-1)$，易知$\frac{1}{a}<1$，

令$f'(x)<0$，得$x<\frac{1}{a}$或$x>1$，则$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a})$和$(1,+\infty)$上分别单调递减；

令$f'(x)>0$,得$\frac{1}{a}<x<1$，则$f(x)$在$(\frac{1}{a},1)$上单调递增；

（iii）当$0<a<1$时，由$f'(x)=ae^x(x-\frac{1}{a})(x-1)$，易知$\frac{1}{a}>1$，

令$f'(x)<0$,得$1<x<\frac{1}{a}$，则$f(x)$在$(1,\frac{1}{a})$上单调递减；

令$f'(x)>0$,得$x>\frac{1}{a}$或$x<1$，则$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上分别单调递增；

综上所述：

当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a})$和$(1,+\infty)$上分别单调递减；在$(\frac{1}{a},1)$上单调递增；

当$a=0$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

当$0<a<1$时，$f(x)$在$(1,\frac{1}{a})$上单调递减；在$(-\infty,1)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上分别单调递增.

21.【解析】

（1）设事件B_1="第 11 题得 0 分"，B_2="第 11 题得 2 分"，B_3="第 11 题得 5 分"，

A_1="第 12 题得 2 分"，A_2="第 12 题得 0 分"

所以$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.5$，$P(B_3)=0.4$，$P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.3$

由题意可知X的可能取值为$0,2,4,5,7$

$P(X=0)=P(B_1A_1)=P(B_1)P(A_1)=0.1\times0.3=0.03$

$P(X=2)=P(B_1A_2+B_2A_1)=P(B_1)P(A_2)+P(B_2)P(A_1)=0.1\times0.7+0.5\times0.3=0.22$

$P(X=4)=P(B_2A_2)=P(B_2)P(A_2)=0.5\times0.7=0.35$

$P(X=5)=P(B_3A_1)=P(B_3)P(A_1)=0.4\times0.3=0.12$

$P(X=7)=P(B_3A_2)=P(B_3)P(A_2)=0.4\times0.7=0.28$

（每个概率值 1 分，写对其中 4 个得 4 分，少于 4 个没少一个减 1 分）

所以小明第 11 题 12 题总得分X的分布列为：

X	0	2	4	5	7
P	0.03	0.22	0.35	0.12	0.28

（2）

（法 I）设随机变量Y为小明第 11 题采用策略 B 的得分，

Z_1为小明第 12 题采用策略 A 的得分，Z_2为第 12 题采用策略 B 的得分

易知三个随机变量的分布列及其均值依次为：

Y	0	2	5
P	0.1	0.5	0.4

所以$E(Y)=3$

Z_1	0	2

答案第4页，共7页

P	0.3	0.7

所以 $E(Z_1)=1.4$

Z_2	0	2	5
P	0.1	0.6	0.3

所以 $E(Z_2)=2.7$

若采用方案 1，两题总得分均值为 $3+1.4=4.4$

若采用方案 2，两题总得分均值为 $3+2.7=5.7$，但因时间超过 10 分钟，后面的题得分少 2 分，相当于得分均值为 3.7 分

因为 $4.4>3.7$，所以我赞成小明的方案1

（法 II）

由第（1）可知，小明采用方案 1 时，11 题 12 题总得分的均值为

$E(X)=0\times0.03+2\times0.22+4\times0.35+5\times0.12+7\times0.28=4.4$

设随机变量 Y 为小明采用方案 2 时 11 题 12 题总得分，

Y 的可能取值为 $0,2,4,5,7,10$

可得：

$P(Y=0)=0.1\times0.1=0.01$

$P(Y=2)=0.1\times0.6+0.5\times0.1=0.11$

$P(Y=4)=0.5\times0.6=0.3$

$P(Y=5)=0.1\times0.3+0.4\times0.1=0.07$

$P(Y=7)=0.5\times0.3+0.4\times0.6=0.39$

$P(Y=10)=0.4\times0.3=0.12$

所以随机变量 Y 的分布列为

Y	0	2	4	5	7	10
P	0.01	0.11	0.3	0.07	0.39	0.12

可得 $E(Y)=0\times0.01+2\times0.11+4\times0.3+5\times0.07+7\times0.39+10\times0.12=5.7$

但因时间超过 10 分钟，后面的题得分少 2 分，相当于得分均值为 3.7 分

因为 $5.7-2=3.7<4.4$，

所以我赞成小明的方案 1

（法 III）

分析题意可知：如果第 12 题采用策略 B 将比采用策略 A 平均多得：

$(-2)\times 0.1+5\times 0.3=1.3$ 分

即：仅考虑 11 题与 12 题总得分，方案 2 比方案 1 多1.3分，

但因为两题做题时间超过 10 分钟，后面的题少得 2 分，

因为$1.3<2$，

所以我赞成小明的方案 1

22.【解析】

解：(1)（法 I）

因为$\ln x-ax+1\leqslant 0\ (x>0)$恒成立，

所以$a\geqslant\dfrac{\ln x+1}{x}$恒成立.

设$g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}(x>0)$，

所以$g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

令$g'(x)>0$，解得$x\in(0,1)$，令$g'(x)<0$，解得$x\in(1,+\infty)$，

所以$g(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

所以$g(x)$在$x=1$处取得最大值$g(1)=1$

所以$a\geqslant 1$.

（法 II）

由题意可知：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a(x>0)$

（i）当$a\leq 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)\leqslant 0$不恒成立；

（ii）当$a>0$时，

令$f'(x)>0$，得$0<x<\dfrac{1}{a}$，则$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$单调递增；

令$f'(x)<0$，得$x>\dfrac{1}{a}$，则$f(x)$在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$单调递减.

所以$f(x)$在$x=\dfrac{1}{a}$处取得最大值$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a$.

要使$f(x)\leq 0$恒成立，只需$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a\leq 0$，解得$a\geq 1$.

综上，$a\geqslant 1$．

（2）由（1）知当$a=1$时，$\ln x\leqslant x-1$

令$x=1+\frac{1}{n},(n\in \mathbf{N}_+)$

得$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$．

累加得：$\ln(n+1)-\ln n+\ln n-\ln(n-1)+\cdots+\ln 2-\ln 1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1$，

即$\ln(n+1)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1$．

又因为$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，

所以$n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，即$\ln(1+\frac{1}{n})^n<1$，所以$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}$．

综上：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\mathrm{e}>\ln(n+1)+(1+\frac{1}{n})^n$．

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索