2020－2021 学年度第二学期期中高中一年级质量测试

数学科试题参考答案

1．B　2．D　3．A　4．C　5．A　6．B　7．C　8．A

9．BCD　10．AC　11．ABC　12．AD

13．$\sqrt{13}$　14．14π　15．1　16．$\dfrac{29}{12}$

17．解：(1)$z_3+z_1z_2=15-14i+(1+i)(8+5i)$

$=15-14i+8+5i+8i+5i^2$

$=15-14i+3+13i$

$=18-i$；　………………………　5 分

(2)$z=z_1m^2-z_2m+z_3$

$=(1+i)m^2-(8+5i)m+15-14i$

$=(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)I$　………………………　6 分

因为复平面内表示复数 z 的点位于第四象限，

故$\begin{cases} m^2-8m+15>0， \\ m^2-5m-14<0， \end{cases}$　………………………　7 分

，解得$\begin{cases} m<3 \text{或} m>5， \\ -2<m<7， \end{cases}$　………………………　9 分

即实数 m 的取值范围是$(-2,3)\cup(5,7)$．　………………………　10 分

18．解：(1)由题意得$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=2$，

即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$，　………………………　2 分

又因为 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=1$，所以 $2+2\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=2$，即 $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=0$，………………………　4 分

故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；　………………………　5 分

(2)因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta)=(1,0)$，

所以$\begin{cases} \cos\alpha-\cos\beta=1， \\ \sin\alpha-\sin\beta=0， \end{cases}$　………………………　7 分

由 $\sin\alpha-\sin\beta=0$ 得，$\sin\alpha=\sin\beta$，

结合 $0<\alpha<\beta<\pi$，知 $\beta=\pi-\alpha$，　………………………　9 分

代入 $\cos\alpha-\cos\beta=1$ 得，$\cos\alpha-\cos(\pi-\alpha)=1$，

即 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，故 $\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$，　………………………　11 分

所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{2\pi}{3}$．　………………………　12 分

19．解：(1) 在$\triangle ADC$ 中，因为 $\cos\angle ADC=\dfrac{1}{7}$，$\angle ADC\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$， ························ 2 分

所以 $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{14}；$$ ························ 5 分

(2)在△ABD 中，由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

故 $BD=\dfrac{AB\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\dfrac{8\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=3$， ························ 8 分

在△ABC 中，由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=8^2+5^2-2\times8\times5\times\dfrac{1}{2}=49$， ························ 11 分

所以 $AC=7$． ························ 12 分

20．解：(1)如图，将圆锥 SO 的侧面自母线 SA 处展开，得到扇形 ASA'，SB'为母线 SB 在侧面展开图中相应的线段， ························ 1 分

∵弧 $AA'=2\pi$，$\therefore\angle ASA'=\dfrac{2\pi}{SA}=\dfrac{2\pi}{3}$， ························ 2 分

$\therefore\angle ASB'=\dfrac{\pi}{3}$，取 SB'的中点 D'，则 D'为 D 在侧面展开图中的相应点； ··············· 3 分

连 AD'，在△ASD'中，由余弦定理

$AD'^2=SA^2+SD'^2-2SA\times SD'\times\cos\angle ASD'=\dfrac{27}{4}$， ························ 5 分

故 AD 的最小距离为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$； ························ 6 分

⑵设新正方体工件的棱长为 x，借助轴截面，由三角形相似可得，$\dfrac{x}{\sqrt{3^2-1^2}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}x}{1}$，···8 分

解得 $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ························ 9 分

故 $V_{正}=x^3=\dfrac{16\sqrt{2}}{27}$， ························ 10 分

又 $V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times\sqrt{3^2-1^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$， ························ 11 分

故利用率为$\dfrac{\frac{16\sqrt{2}}{27}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}=\dfrac{8}{9\pi}$． ························ 12 分

21．解　(1)因为 $\boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$，所以$(a+b)(\sin A-\sin B)-c(\sin A-\sin C)=0$，　………………… 1 分

由正弦定理，得$(a+b)(a-b)-c(a-c)=0$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$，　………………………… 3 分

由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，　………………………… 4 分

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$；　………………………… 5 分

(2)因为$\triangle ABC$ 是钝角三角形，不妨设 A 为钝角，

从而 $0<C<\dfrac{\pi}{6}$，否则 A 为钝角，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$C\geq\dfrac{\pi}{6}$，$A+B+C>\pi$，与事实不符；

根据三角形中大角对大边，必有 $a>b>c$，　………………………… 7 分

于是 $m=\dfrac{a}{c}$，

结合正弦定理，$m=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}$

$$=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2},$$　………………………… 10 分

因为 $0<C<\dfrac{\pi}{6}$，$0<\tan C<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　………………………… 11 分

故 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}\in(2,+\infty)$．　………………………… 12 分

22．解：(1)证明：因为 D 是 BC 中点，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；　………………………… 2 分

(2)因为 M、O、N 三点共线，故存在实数 λ，使得$\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON}$，　………………………… 3 分

即$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO})$，整理得$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AM}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AN}=\dfrac{m}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\dfrac{n\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$，……… 5 分

由(1)知$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

根据平面向量基本定理，$\begin{cases}\dfrac{m}{1+\lambda}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{n\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ ，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{1+\lambda}+\dfrac{3\lambda}{1+\lambda}=3$； ······················ 7 分

(3)因为$\triangle ABC$是边长为 2 的等边三角形，故 $AM=2m$，$AO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

在$\triangle AOM$中，由余弦定理，$OM^2=AM^2+AO^2-2\times AM\times AO\times\cos 30^\circ=4(m^2-m+\dfrac{1}{3})$

在$\triangle AOM$中，同法可得 $ON^2=4(n^2-n+\dfrac{1}{3})$， ······················ 8 分

故 $OM^2+ON^2=4(m^2+n^2-m-n+\dfrac{2}{3})$

$=4[(m+n)^2-(m+n)\ -2mn+\dfrac{2}{3}]$ ······················ 9 分

由(2)知 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=3$，得 $mn=\dfrac{m+n}{3}$，

故 $OM^2+ON^2=4[(m+n)^2-(m+n)-\dfrac{2}{3}(m+n)+\dfrac{2}{3}]=4[(m+n-\dfrac{5}{6})^2-\dfrac{1}{36}]$， ·············· 10 分

由基本不等式，$\dfrac{m+n}{3}=mn\leq(\dfrac{m+n}{2})^2$，$m+n\geq\dfrac{4}{3}$， ······················ 11 分

当且仅当 $m+n=\dfrac{4}{3}$，即 $m=n=\dfrac{2}{3}$，时，OM^2+ON^2取最小值$\dfrac{4}{9}$，

故 OM^2+ON^2的取值范围是$[\dfrac{4}{9},+\infty)$． ······················ 12 分