

数学科试题

本试题共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟

- 说明：1. 答题前，考生务必用黑色字迹的签字笔将自己的班级、姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上，并在“考场号”、“座位号”栏内填涂考场号、座位号。
 2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；答案不能答在试题卷上。
 3. 非选择题必须用黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡上各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
 4. 考生必须保持答题卡整洁，考试结束后，将答题卡交回，试题卷自己保存。

一、单项选择题（8 小题，每小题 5 分，共 40 分；在每小题提供的 4 个选项中，只有一项符合题目要求）

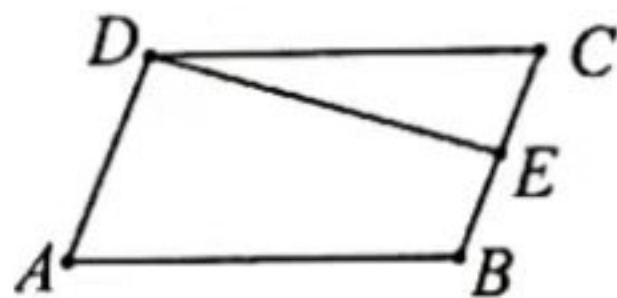
1. i 是虚数单位，集合 $S = \{-1, 0, 1\}$ ，则（ * ）

- A. $i \in S$ B. $i^2 \in S$ C. $i^3 \in S$ D. $\frac{2}{i} \in S$

2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是 BC 的中点，

若 $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ， $\vec{AD} = \mathbf{b}$ ，则 \vec{DE} 等于（ * ）

- A. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$ B. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$
 C. $\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ D. $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$



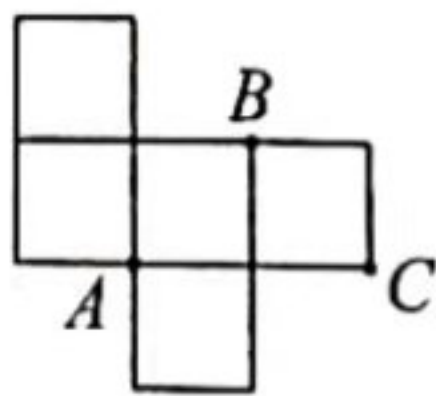
3. 某圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形，则该圆锥的体积为（ * ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\sqrt{3}\pi$ C. $2\sqrt{3}\pi$ D. $3\sqrt{3}\pi$

4. 若复数 z 满足 $z(1 + \sqrt{3}i) = 2i$ ，则在复平面内 z 对应的点的坐标是（ * ）

- A. $(\sqrt{3}, 1)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

5. 一个无盖的正方体盒子的平面展开图如图， A 、 B 、 C 是展开图上的三点，则在正方体盒子中， $\angle ABC =$ （ * ）



- A. 60° B. 30° C. 90° D. 45°

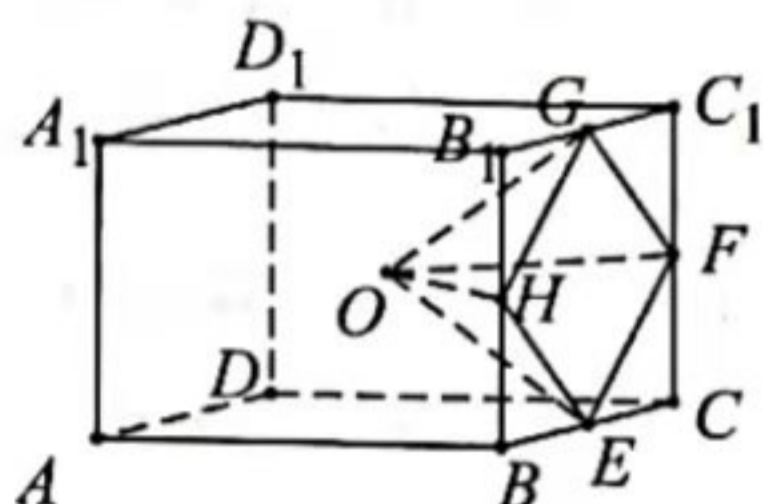
6. 设 $x, y \in \mathbf{R}$ ，向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$ ， $\mathbf{b} = (1, y)$ ， $\mathbf{c} = (2, -4)$ ，且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ ， $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ ，则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| =$ （ * ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 10

7. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $AB=7$, $\angle ACB=60^\circ$, 则该三角形的周长为 (*)

- A. 15 B. 18 C. 20 D. 21

8. 学生到工厂劳动实践, 利用3D打印技术制作模型. 如图, 该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体, 其中 O 为长方体的中心, E 、 F 、 G 、 H 分别为所在棱的中点, $AB=BC=6$ cm, $AA_1=4$ cm, 3D打印所用原料密度为 0.9 g/cm³, 不考虑打印损耗, 制作该模型所需原料的质量为 (*) g



- A. 118.8 g B. 108 g C. 97.2 g D. 86.4 g

二、不定项选择题 (4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分; 在每小题提供的 4 个选项中, 有不少于 一项符合题目要求)

9. 下列说法正确的是 (*)

- A. 以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆台
 B. 以等腰三角形的底边上的高线所在的直线为旋转轴, 其余各边旋转一周形成的曲面所围成的几何体是圆锥
 C. 圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面
 D. 用一个平面去截球, 得到的截面是一个圆面

10. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别为角 A 、 B 、 C 的对边, 以下能独立说明 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的是 (*)

- A. $\sin A = \sin B$ B. $\sin 2A = \sin 2B$
 C. $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ D. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

11. 设 z_1 , z_2 是复数, 则下列说法正确的是 (*)

- A. 若 $|z_1 - z_2| = 0$, 则 $z_1 = z_2$ B. 若 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 $\overline{z_1} = z_2$
 C. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$ D. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$

12. 设 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 是平面直角坐标系中相异的四点, 若 $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), $\overrightarrow{A_1A_4} = \mu \overrightarrow{A_1A_2}$ ($\mu \in \mathbf{R}$), 且 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$, 则称 A_3 , A_4 调和分割 A_1 , A_2 . 已知平面上的点 C , D 调和分割点 A , B , 则下面说法正确的是 (*)

- A. A 、 B 、 C 、 D 四点共线 B. D 可能是线段 AB 的中点
 C. C 、 D 可能同时在线段 AB 上 D. C 、 D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

三、填空题 (4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分; 第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分)

13. i 是虚数单位, 则 $\left| \frac{5+i}{1-i} \right| = \underline{\quad * \quad}$.

14. 长方体的长、宽、高分别为 3、2、1, 其顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 $\underline{\quad * \quad}$.

15. 台风中心从 A 地以每小时 20 千米的速度向东北方向移动, 离台风中心 30 千米内的地区为危险区, 城市 B 在 A 的正东 40 千米处, 则 B 城市处于危险区的时间为 $\underline{\quad * \quad}$ 小时.

16. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\vec{BE} = \vec{EC}$, $\vec{DF} = 2\vec{FC}$, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \underline{\quad * \quad}$.

四、解答题 (6 道大题, 共 70 分)

17. (本小题满分 10 分) 已知 i 为虚数单位, 复数 $z_1=1+i$, $z_2=8+5i$, $z_3=15-14i$,

(1) 将 $z_3+z_1z_2$ 化为 $a+bi$ 的形式, 这里 $a, b \in \mathbf{R}$;

(2) 如果复平面内表示复数 $z=z_1m^2-z_2m+z_3$ 的点位于第四象限, 求实数 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分) 已知 $a = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $b = (\cos \beta, \sin \beta)$, 其中 $0 < \alpha < \beta < \pi$.

(1) 若 $|a+b| = \sqrt{2}$, 求证: $a \perp b$;

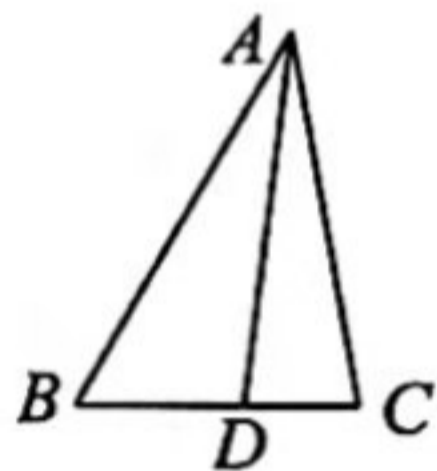
(2) 设 $c = (1, 0)$, 若 $a-b=c$, 求 α, β 的值.

19. (本小题满分 12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$, $AB=8$,

点 D 在 BC 边上, 且 $CD=2$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{7}$.

(1) 求 $\sin \angle BAD$;

(2) 求 BD 以及 AC 的长.



20. (本小题满分 12 分) 下图是一块圆锥体工件, 已知该工件的底面半径 $OA=1$, 母线 $SA=3$,

(1) A, B 是圆 O 的一条直径的两个端点, 母线 SB 的中点 D ,

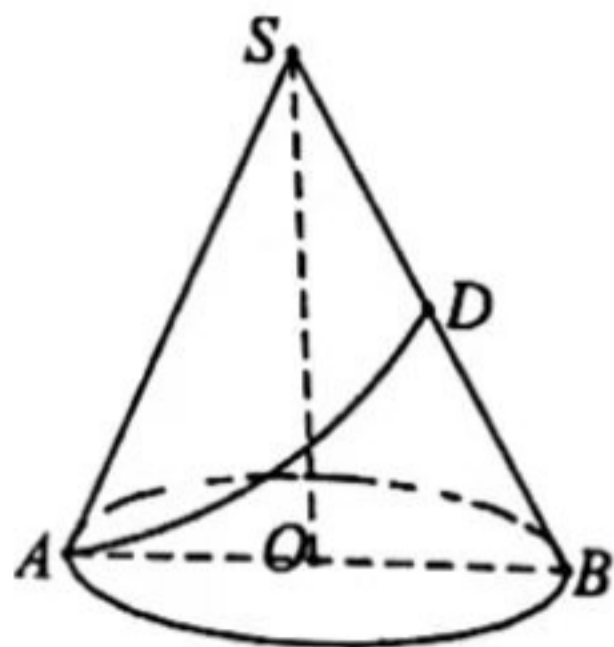
用软尺沿着圆锥面测量 A, D 两点的距离, 求这个距离的

最小值;

(2) 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的正方体

新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 求

原工件材料的利用率. (材料利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$)



21. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 向量 $m = (a+b, \sin A - \sin C)$, 向量 $n = (c, \sin A - \sin B)$, 且 $m \parallel n$.
- (1) 求角 B 的大小;
 - (2) 如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 求该三角形中最长边与最短边的比值 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分) 如图所示, AD 是 $\triangle ABC$ 的一条中线, 点 O 满足 $\vec{AO} = 2\vec{OD}$, 过点 O 的直线分别与射线 AB 、射线 AC 交于 M, N 两点,

(1) 求证: $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$;

(2) 设 $\vec{AM} = m\vec{AB}$, $\vec{AN} = n\vec{AC}$, $m > 0, n > 0$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值;

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 求 $OM^2 + ON^2$ 的取值范围.

