密封线内不要答

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，则直线 l 的倾斜角为

（A）45°　　（B）90°

（C）120°　　（D）135°

（2）在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $(1,5,2)$ 关于 xOy 坐标平面的对称点为

（A）$(-1,5,2)$　　（B）$(1,-5,2)$

（C）$(1,5,-2)$　　（D）$(-1,-5,-2)$

（3）抛物线 $x^2=2py$ 的焦点坐标为 $(0,1)$，则其准线方程为

（A）$x=-1$　　（B）$x=1$

（C）$y=-1$　　（D）$y=1$

（4）圆 O_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 $O_2:(x-2)^2+y^2=9$ 的位置关系为

（A）外离　　（B）外切

（C）相交　　（D）内切

（5）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^4 的系数为

（A）-5　　（B）-10

（C）5　　（D）10

（6）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小为

（A）$30°$　　（B）$45°$

（C）$60°$　　（D）$90°$

（7）已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$．若 C_1 与 C_2 的焦距之比为 $1:3$，则 C_2 的渐近线方程为

（A）$2x\pm\sqrt{5}y=0$　　（B）$\sqrt{5}x\pm 2y=0$

（C）$x\pm\sqrt{2}y=0$　　（D）$\sqrt{2}x\pm y=0$

（8）将4名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑和冰球3个项目进行培训，每名志愿者只分配到1个项目，每个项目至少分配1名志愿者，则不同的分配方案共有

（A）48种　　（B）36种

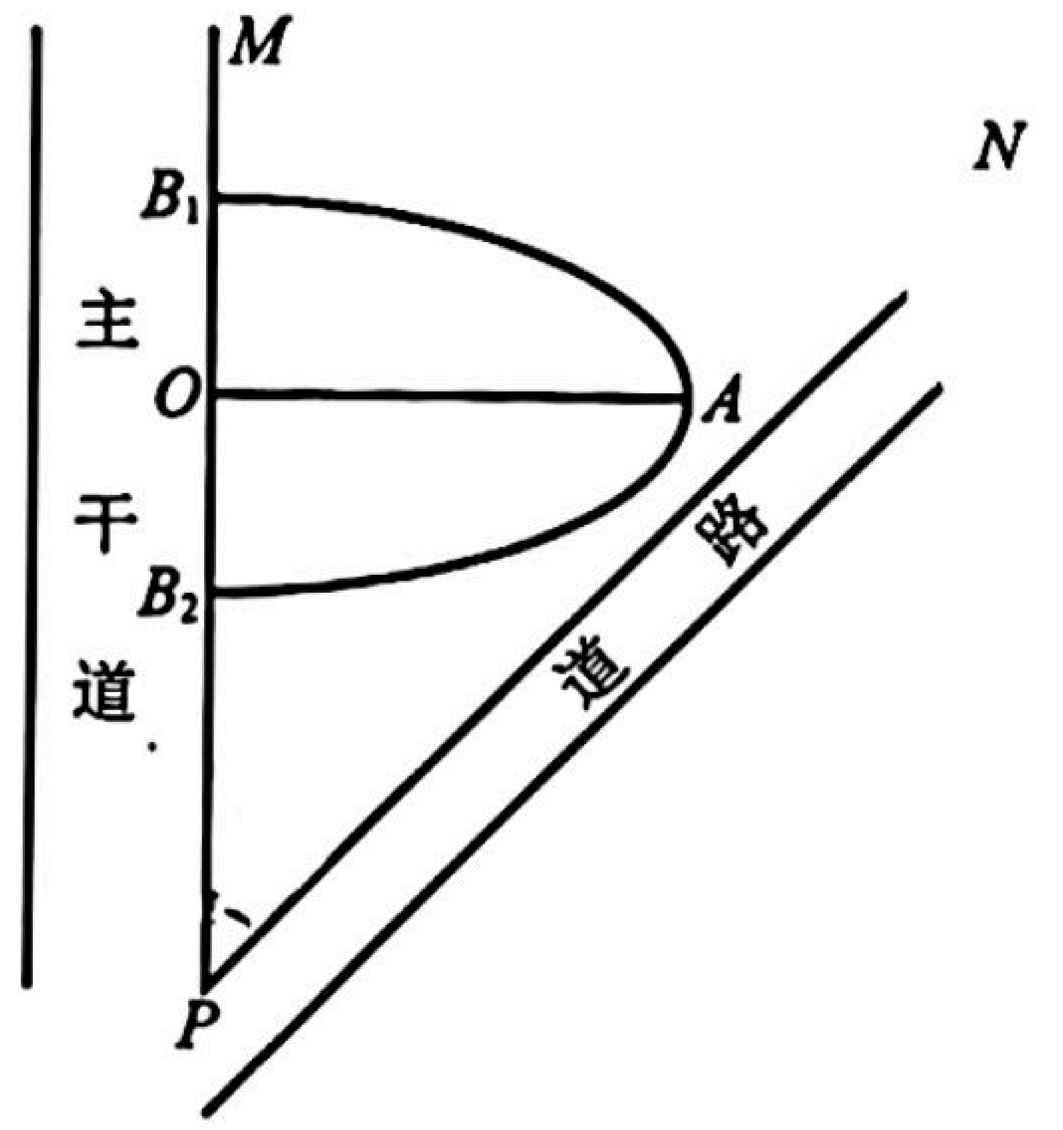
（C）24种　　（D）12种

（9）设抛物线的顶点为原点，焦点 F 在 x 轴上．过 F 的直线交抛物线于点 A，则以 AF 为直径的圆

（A）必过原点　　（B）必与 x 轴相切

（C）必与 y 轴相切　　（D）必与抛物线的准线相切

（10）如图，某市规划在两条道路边沿 PM,PN 之间建造一个半椭圆形状的主题公园，其中 B_1B_2 为椭圆的短轴，OA 为椭圆的半长轴．已知 $OP=3\text{km}$，$B_1B_2=2\text{km}$，$\angle MPN=45°$．为使 OA 尽可能大，其取值应为（精确到 0.1km）



（A）2.9km

（B）2.8km

（C）2.7km

（D）2.6km

第二部分（非选择题 共110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）圆心为$(1,0)$且过原点的圆的方程是__

（12）已知直线$l_1: ax+y+1=0$，$l_2: x+ay+1=0$．若$l_1 \perp l_2$，则实数$a=$___

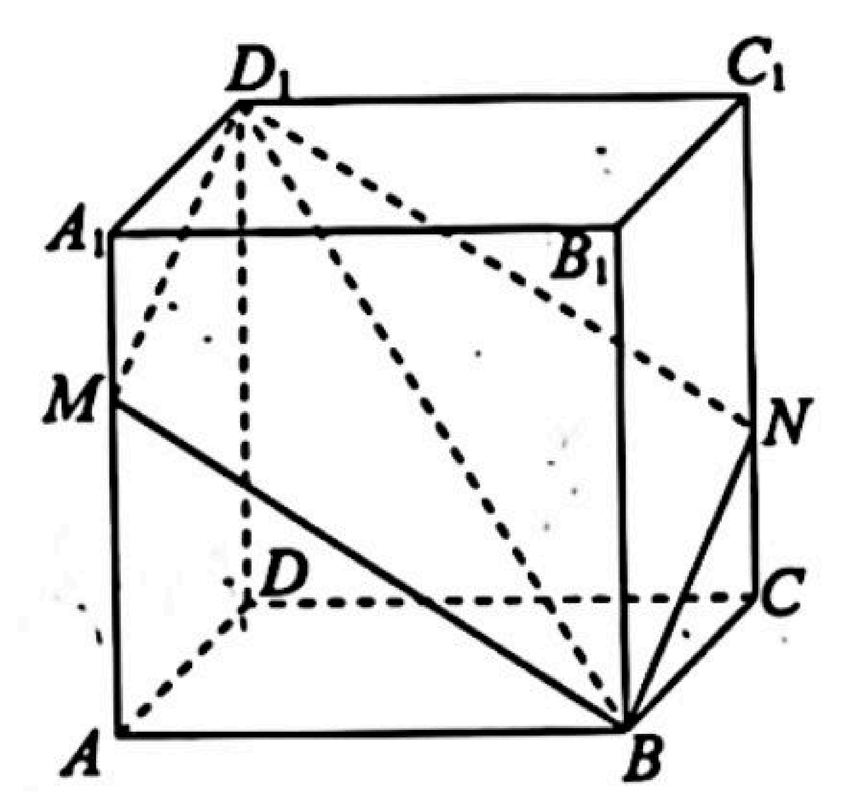
（13）在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=2$，则直线AA_1与BC_1所成角的大小为___；

直线AA_1到平面BB_1C_1C的距离为___.

（14）设双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的两个焦点是F_1, F_2，点P在双曲线上，则$||PF_1|-|PF_2||=$___；

若$\angle F_1PF_2$为锐角，则点P的纵坐标的取值范围是___

（15）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，过BD_1的平面分别交AA_1, CC_1于点M, N．给出下列四个结论：



① 四边形D_1MBN一定是平行四边形；

② 四边形D_1MBN可能是正方形；

③ 四边形D_1MBN为菱形时，其面积最小；

④ 四边形D_1MBN为矩形时，其面积最大.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题10分）

从2位女生，4位男生中选出3人参加垃圾分类宣传活动．

（Ⅰ）共有多少种不同的选择方法？

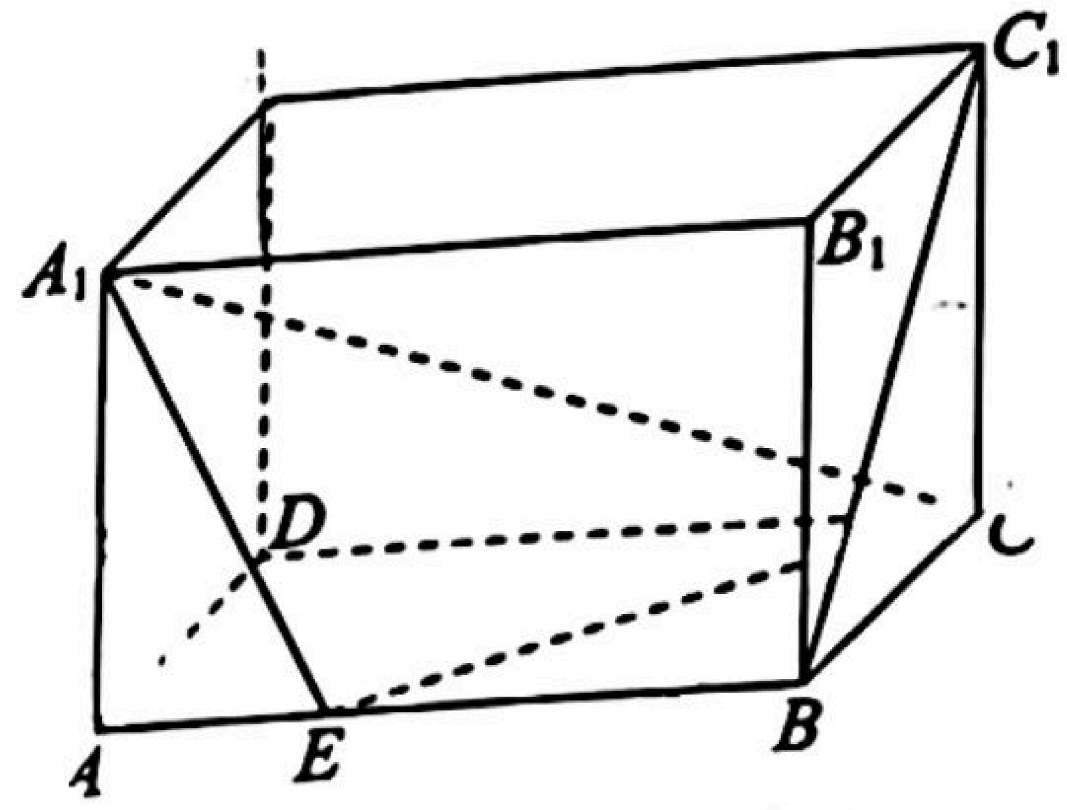
（Ⅱ）如果至少有1位女生入选，共有多少种不同的选择方法？

（17）（本小题15分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$AD=AA_1=2$，点E在AB上，且$AE=1$．

（Ⅰ）求直线A_1E与BC_1所成角的余弦值；

（Ⅱ）求二面角A_1-EC-D的余弦值．



（18）（本小题15分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的一个顶点为$P(0,1)$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）直线$l:y=x+m$与椭圆C交于A,B两点，且$|PA|=|PB|$，求m的值．

（19）（本小题15分）

设A,B为两定点，$AB=2$，曲线C是到点A的距离与到点B的距离之比为定值$\lambda(\lambda>0)$的点组成的集合．

（Ⅰ）判断AB的中点是否在曲线C上；

（Ⅱ）建立适当的平面直角坐标系，求曲线C的方程，并讨论曲线C的形状．

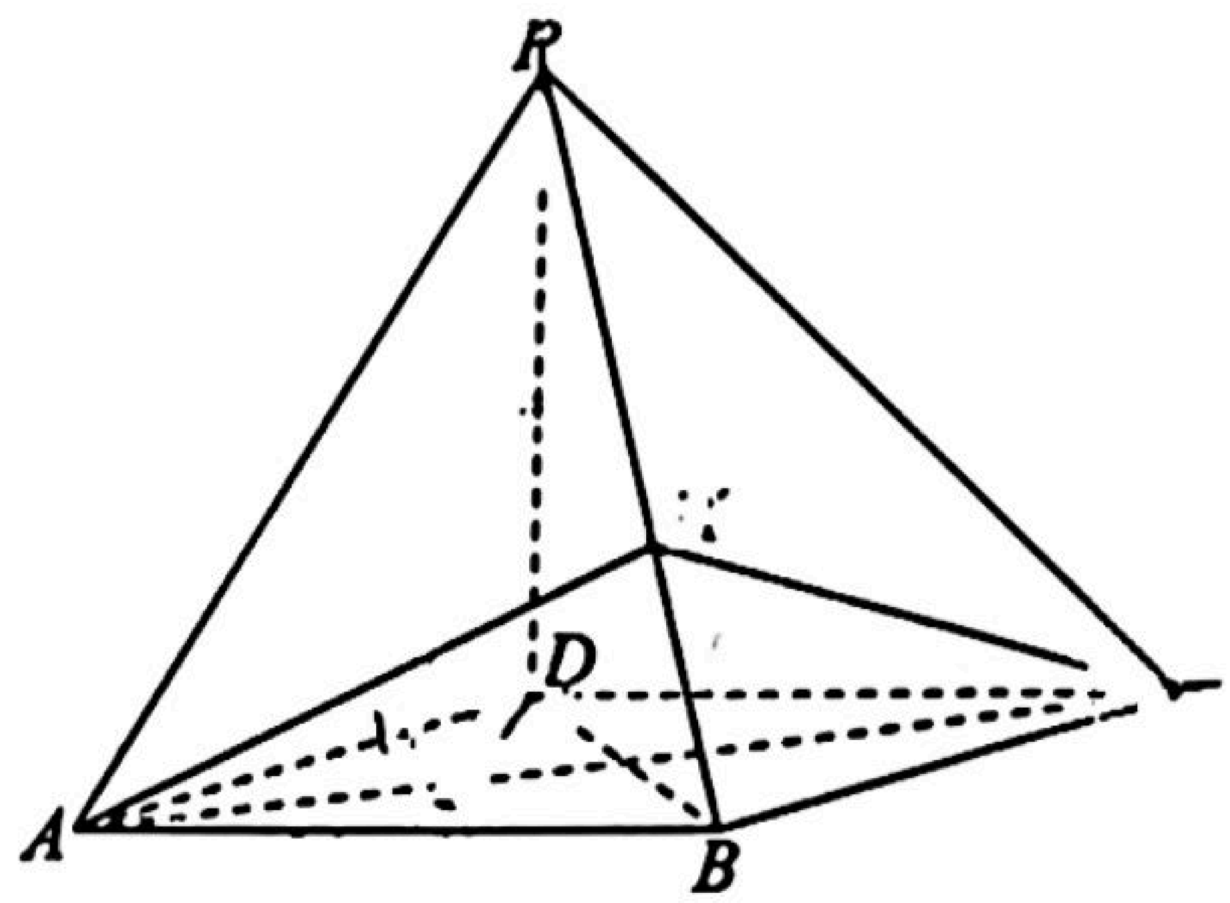
（20）（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ADC=120^\circ$，$PD=AD=2$．点 M 在 PB 上，且 $PB\perp$ 平面 ACM．

（Ⅰ）证明：$AC\perp BD$；

（Ⅱ）求 $\dfrac{PM}{PB}$ 的值；

（Ⅲ）求点 M 到平面 PAD 的距离．



（21）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点．

（Ⅰ）证明：$|MN|\geqslant\sqrt{3}$；

（Ⅱ）已知两点 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$．记直线 A_1M 的斜率为 k_1，直线 A_2N 的斜率为 k_2，求 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 的值．

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）C	（3）C	（4）D	（5）B
（6）A	（7）A	（8）B	（9）C	（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(x-1)^2+y^2=1$　　（12）0

（13）$45°$　$\sqrt{3}$　　（14）$2\sqrt{3}$　$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

（15）①③④

注：（13）、（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；（15）题少解给 3 分，有错解不给分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 10 分）

解：（Ⅰ）从 2 位女生，4 位男生中选出 3 人参加垃圾分类宣传活动，

选择方法数为 $\mathrm{C}_6^3=20$． ………5 分

（Ⅱ）没有女生入选的选择方法数为 $\mathrm{C}_4^3=4$， ………8 分

所以至少有 1 位女生入选的选择方法数为 $20-4=16$． ………10 分

（17）（共 15 分）

解：（Ⅰ）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系． ………1 分

则 $A_1(2,0,2)$，$E(2,1,0)$，$B(2,3,0)$，$C(0,3,0)$，$C_1(0,3,2)$．

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$． ………4 分

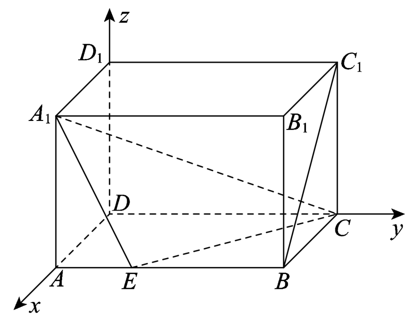
所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1E},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1E}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$． ………7 分

所以直线 A_1E 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{EC}=(-2,2,0)$.

设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$ ，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}y-2z=0,\\ -2x+2y=0.\end{cases}$$ ·········9 分



令 $y=2$ ，则 $x=2, z=1$.

于是 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$. ·········11 分

显然 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量. ·········12 分

因为 $\cos\langle\overrightarrow{DD_1},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{DD_1}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{3}$, ·········15 分

所以二面角 A_1-EC-D 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

（18）（共 15 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c .

由题意得 $$\begin{cases}b=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$$ ·········3 分

解得 $a=2$. ·········4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ·········5 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}y=x+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $5x^2+8mx+4(m^2-1)=0$. ·········7 分

由 $\varDelta=(8m)^2-4\times5\times4(m^2-1)>0$ ，解得 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$. ·········8 分

设 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8m}{5}$. ·········9 分

设线段 AB 的中点为 D ，

则 $x_D=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{4m}{5}$ ， $y_D=x_D+m=\dfrac{m}{5}$. ·········11 分

“$|PA|=|PB|$”等价于“$PD\perp AB$”. ·········12 分

所以 $\dfrac{1-\dfrac{m}{5}}{\dfrac{4m}{5}}=-1$. ·········14 分

解得 $m=-\dfrac{5}{3}$，符合题意. ·········15 分

所以 $m=-\dfrac{5}{3}$.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）设 AB 的中点为 O，则 $\dfrac{OA}{OB}=1$. ·········2 分

所以当 $\lambda=1$ 时，点 O 在曲线 C 上； ·········3 分

当 $\lambda\neq 1$ 时，点 O 不在曲线 C 上. ·········4 分

（Ⅱ）以点 A,B 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系.

所以 $A(-1,0),B(1,0)$. ·········6 分

设曲线 C 上任意一点为 $P(x,y)$，由题意知 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\lambda$. ·········7 分

所以 $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lambda$. ·········8 分

整理得 $(1-\lambda^2)x^2+(1-\lambda^2)y^2+2(1+\lambda^2)x+(1-\lambda^2)=0$. ·········10 分

经检验，曲线 C 的方程为 $(1-\lambda^2)x^2+(1-\lambda^2)y^2+2(1+\lambda^2)x+(1-\lambda^2)=0$.

当 $\lambda=1$ 时，曲线 C 的方程化为 $x=0$. ·········11 分

所以曲线 C 的形状是直线. ·········12 分

当 $\lambda\neq 1$ 时，曲线 C 的方程化为 $(x+\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2})^2+y^2=\dfrac{4\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$. ·········14 分

所以曲线 C 的形状是以 $(-\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2},0)$ 为圆心，$\left|\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right|$ 为半径的圆. ·········15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $PB\perp$ 平面 ACM，

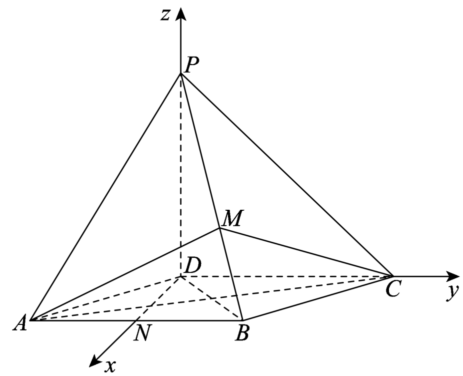
所以 $PB\perp AC$． ………1 分

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AC$． ………2 分

所以 $AC\perp$ 平面 PBD． ………3 分

所以 $AC\perp BD$． ………4 分



（Ⅱ）取 AB 中点 N，连接 DN．

由（Ⅰ）得四边形 $ABCD$ 为菱形，

所以 $AB=AD$．

因为 $\angle ADC=120^\circ$，

所以 $DN\perp DC$． ………5 分

因为 $DP,\ DN,\ DC$ 两两互相垂直，

以 D 为原点，$\overrightarrow{DN},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系． ………6 分

则 $D(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$P(0,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},1,-2)$．

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,-2\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$． ………7 分

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\lambda,1+\lambda,2-2\lambda)$． ………8 分

因为 $PB\perp$ 平面 ACM，

所以 $PB\perp AM$，即 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$． ………9 分

所以 $-3+3\lambda+(1+\lambda)+(4\lambda-4)=0$．

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{PM}{PB}=\dfrac{3}{4}$． ………10 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）得 $\overrightarrow{AM}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{2})$． ………11 分

因为 $\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$．

设平面 ADP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ z=0.\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，于是 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$．　　　　………13 分

所以点 M 到平面 PAD 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．　　　　………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）① 当直线 l 的斜率不存在时，$M(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),N(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，或 $M(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}),N(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．

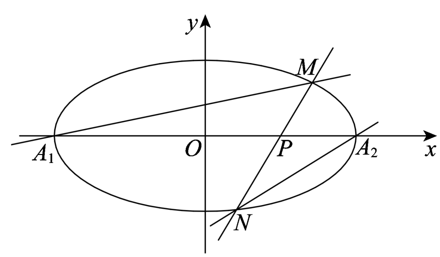
此时 $|MN|=\sqrt{3}$．　　　　………1 分

② 当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)$．

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$．　　　　………3 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}.\end{cases}$　　　　………5 分



所以 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{4\sqrt{3k^4+4k^2+1}}{1+4k^2}$．　　　　………7 分

设 $m=1+4k^2$，则 $m\geqslant 1$．

所以 $|MN|=\dfrac{\sqrt{3(m-1)^2+16m}}{m}=\dfrac{\sqrt{3m^2+10m+3}}{m}>\dfrac{\sqrt{3m^2}}{m}=\sqrt{3}$．　　　　………8 分

综上 $|MN|\geqslant\sqrt{3}$．

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时， $M(1,\frac{\sqrt{3}}{2}),N(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，或 $M(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}),N(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，

此时都有 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$. ·········9 分

直线 A_1M 的斜率为 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$ ，直线 A_2N 的斜率为 $k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$. ·········11 分

法一： $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$

$=\frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_2-1)(x_1+2)}$ ·········12 分

$=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+x_2+2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+3x_2-2}$ ·········13 分

$=\frac{(4k^2-4)-2\times 8k^2+(1+4k^2)x_2+2(1+4k^2)}{(4k^2-4)-8k^2+3(1+4k^2)x_2-2(1+4k^2)}$

$=\frac{-2(1+2k^2)+(1+4k^2)x_2}{-6(1+2k^2)+3(1+4k^2)x_2}=\frac{1}{3}$. ·········15 分

法二： $\frac{k_1^2}{k_2^2}=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}$

$=\frac{(4-x_1^2)(x_2-2)^2}{(4-x_2^2)(x_1+2)^2}$ ·········12 分

$=\frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)}$

$=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$ ·········13 分

$=\frac{(4k^2-4)-2\times 8k^2+4(1+4k^2)}{(4k^2-4)+2\times 8k^2+4(1+4k^2)}=\frac{1}{9}$. ·········14 分

又 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}>0$ ，

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$. ·········15 分

综上， $\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{3}$.