雅礼中学2025届高三月考试卷(七)

数　学

命题:雅礼中学高三数学备课组　　审题:雅礼中学高三数学备课组

座位号＿＿＿＿ 考生号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+2}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x|\log_2(x+1)<2\}$,则 $A\cap B=$

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,2)$　　C. $(-1,2]$　　D. $(-1,2)$

2. "$a=1$"是"复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$为纯虚数"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知随机变量 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(\xi\leqslant 1)=P(\xi\geqslant a)$,则 $\frac{1}{x}+\frac{9}{a-x}(0<x<a)$ 的最小值为

A. 5　　B. $\frac{11}{2}$　　C. $\frac{20}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

5. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)=0$,则 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F,过点 F 且倾斜角为 30° 的直线交双曲线 C 的两条渐近线于 D,E 两点,则 $|DE|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

7. 从几何体的某一顶点开始，沿着棱不间断、不重复地画完所有棱的画法称为“一笔画”. 下列几何体可以“一笔画”的是

A　　　　B　　　　C　　　　D

8. 定义在$(0,+\infty)$的增函数$f(x)$满足：$f(x)+f(y)=f(xy)-1$，且$f(2)=0$，$f(a_n)=n-1$. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则使得$S_n<2025$成立的n的最大值是

A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 11

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知a,b是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，则下列命题为真命题的有

A. 若$\alpha /\!/ \beta, a /\!/ \alpha, b /\!/ \beta$，则$a,b$平行或相交

B. 若$\alpha \perp \beta, a \perp \alpha, b \perp \beta$，则$a \perp b$

C. 若$a \subset \alpha, b \subset \beta, a /\!/ \beta, b /\!/ \alpha$，则$\alpha /\!/ \beta$

D. 若$a \subset \alpha, b \subset \beta, a /\!/ \beta, a \perp b$，则$\alpha,\beta$平行或相交

10. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \sin^2\frac{A+C}{2}=b \cdot \sin A$，下列结论正确的是

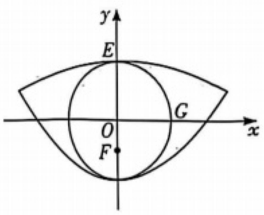
A. $B=\frac{\pi}{3}$

B. 若$a=4,b=5$，则$\triangle ABC$有两解

C. 当$a-c=\frac{\sqrt{3}}{3}b$时，$\triangle ABC$为直角三角形

D. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\cos A+\cos C$的取值范围为$(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

11. 数学中有许多美丽的曲线，图中美丽的眼睛图案由两条曲线构成，曲线$C_1:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，上顶点为$E$，右顶点为$G$，曲线$C_2$上的点满足到$F(0,-1)$和直线$y=1$的距离之和为定值4，已知两条曲线具有公共的上下顶点，过点F作斜率小于0的直线l与两曲线从左到右依次交于A,B,C,D，且$y_A \geqslant 1$，则



A. 曲线C_2由两条抛物线的一部分组成

B. 线段AF的长度与点A到直线$y=5$的距离相等

C. 若线段AB的长度为$\frac{5}{6}$，则直线l的斜率为$-\frac{3}{4}$

D. 若$S_{\triangle AFE}=3S_{\triangle DFG}$，则直线$l$的斜率为$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知二项式$\left(x+\frac{1}{x^5}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开式中含有常数项，则 n 的最小值为__________.

13. 小博参加一项篮球投篮测试，测试规则如下：若出现连续两次投篮命中，则通过测试；若出现连续两次投篮不中，则不通过测试. 已知小明每次投篮命中的概率均为$\frac{2}{3}$，则小明通过测试的概率为__________.

14. 已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$，若不等式 $f(ax)<f(x^2-x+1)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为__________.

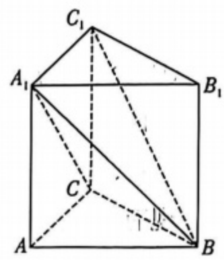
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $BB_1C_1C\perp$底面 ABC，且 $AB=AC$，$A_1B=A_1C$.

(1)证明：$AA_1\perp$平面 ABC；

(2)若 $AA_1=BC=2$，$\angle BAC=90°$，求平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 的夹角的余弦值.



16.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{ax-1}{x-a}$,其中 $a>1$.

(1)当 $a=2$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 的对称中心;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{9}x$ 在区间 (a,a^2+a-1) 上单调递减,求实数 a 的取值范围.

17.(本小题满分 15 分)

“石头、剪刀、布”是我们小时候常玩的游戏,游戏规则如下:

①石头赢剪刀,剪刀赢布,布赢石头;

②两人游戏时,出相同的手势为平局;多人游戏时都出相同的手势或者三种手势都出现为平局.

现有 $n(n\geqslant 3)$ 人玩游戏.

(1)分别求 3 人,4 人玩一轮游戏,平局的概率 $P(3)$,$P(4)$;

(2)求 $n(n\geqslant 3)$ 人玩一轮游戏,平局的概率 P(结果用 n 表示);

(3)求 5 人玩 2 轮游戏,在第 2 轮决出唯一获胜者的概率 Q.

18.(本小题满分 17 分)

已知点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,平面内过一动点 P(异于 A,B)的直线 PA,PB 分别与直线 $x=4$ 相交于 M,N 两点,且 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$,记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)若斜率为 1 的直线 l 与曲线 C 相交于 E,F 两点,且 $|EF|=\frac{4\sqrt{6}}{5}$,求直线 l 的方程;

(3)记$\triangle PMN$ 与$\triangle PAB$ 外接圆的半径分别为 r_1,r_2,求$\frac{r_1}{r_2}$的最小值.

19.(本小题满分 17 分)

记集合 $S_n=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}$,$n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$,$\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in S_n$,$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

(1)$\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in S_3$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,记随机变量 $X=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,求 $P(X=0)$;

(2)若集合 $M\subseteq S_n$,$\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,请写出一个集合 M,使得集合 M 中的元素个数最多,并说明理由;

(3)若集合$T\subseteq S_n$,$\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$,求证:集合 T 中至多有 2^{n-1}个元素.

雅礼中学2025届高三月考试卷(七)

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答　案	D	C	D	D	A	A	C	B	BD	ACD	ABD

1.D 【解析】不等式$\frac{x+2}{x-2}\leqslant 0$等价于$\begin{cases}(x+2)(x-2)\leqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$解得$-2\leqslant x<2$,$\therefore A=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$;不等式$\log_2(x+1)<2$等价于$\log_2(x+1)<\log_2 4$,$\therefore\begin{cases}x+1>0,\\ x+1<4,\end{cases}$$\therefore -1<x<3$,$\therefore B=\{x\mid -1<x<3\}$,$\therefore A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}$.

2.C 【解析】复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{(a-1)+(a+1)\mathrm{i}}{2}=\frac{a-1}{2}+\frac{a+1}{2}\mathrm{i}$,当$a=1$时,$\frac{a-1}{2}=0$,复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$,是纯虚数;当复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$为纯虚数时,有$\begin{cases}\frac{a-1}{2}=0,\\ \frac{a+1}{2}\neq 0,\end{cases}$解得$a=1$.则"$a=1$"是"复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$为纯虚数"的充要条件.

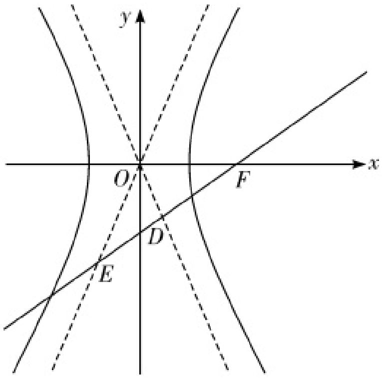
3.D 【解析】由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\times(-3)+3}=1$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|=2$,$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.D 【解析】根据正态分布的知识得$a+1=2\times2=4\Rightarrow a=3$,则$0<x<3$,$3-x>0$,$\frac{1}{x}+\frac{9}{a-x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{3-x}\right)(3-x+x)=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-x}{x}+\frac{9x}{3-x}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-x}{x}\cdot\frac{9x}{3-x}}\right)=\frac{16}{3}$,当且仅当$\frac{3-x}{x}=\frac{9x}{3-x}$,即$x=\frac{3}{4}$时取等号.

5.A 【解析】$\because\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)=0$,$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$,可得$\tan\alpha=1$,$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

6.A 【解析】由题可知$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$c=2$,渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$,则两条渐近线倾斜角分别为$60°$和$120°$,直线DE的倾斜角为$30°$,且经过右焦点F,所以该直线与其中一条渐近线垂直.不妨设D为垂足,如图可知$\angle FDO=90°$,易得$\triangle DEO\cong\triangle DFO$,则$|DE|=|FD|=\frac{\sqrt{3}}{2}|OF|=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\sqrt{3}$.



7.C 【解析】从一顶点出发的棱数为双数的顶点叫偶点,凡是偶点组成的图形一定可以"一笔画",所以C选项正确;从一顶点出发的棱数为单数的顶点叫奇点,凡是包含奇点的图形,必须满足只有两个奇点,其余点为偶点才可以一笔画,而ABD选项图形中,每个点都是奇点,所以不能"一笔画".

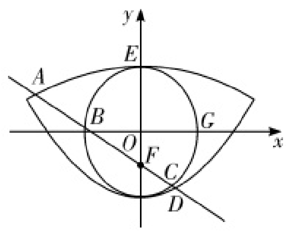
8.B 【解析】法一:$\because f(x)+f(y)=f(xy)-1$,可令$f(x)=\log_a x-1$,又$f(2)=0$,则$\log_a 2-1=0$,$\therefore a=2$,$\therefore f(x)=\log_2 x-1$.$\because f(a_n)=\log_2 a_n-1=n-1$,$\therefore a_n=2^n$,$\therefore S_n=\frac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2<2025$,$\therefore 2^{n+1}<2027$.$\because 2^{10}=1024$,$2^{11}=2048$,$\therefore(n+1)_{\max}=10$,$\therefore n_{\max}=9$.

法二：$\because f(x)+f(y)=f(xy)-1$，$f(a_n)=n-1$，由题 $f(2)=0=1-1$，$\therefore a_1=2$；令 $x=y=2$，$\therefore f(2)+f(2)=f(4)-1$，$\therefore f(4)=1=2-1$，$\therefore a_2=4$；令 $x=2,y=4$，$\therefore f(2)+f(4)=f(8)-1$，$\therefore f(8)=2=3-1$，$\therefore a_3=8$；$\therefore a_1=2^1$，$a_2=2^2$，$\cdots$，$a_n=2^n$，$\therefore S_n=\dfrac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2<2025$，$\therefore 2^{n+1}<2027$. $\because 2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$\therefore (n+1)_{\max}=10$，$\therefore n_{\max}=9$.

9. BD 【解析】若 $\alpha/\!/\beta$，$a/\!/\alpha$，$b/\!/\beta$，则 a,b 平行或相交或异面，故 A 错误；若 $\alpha\perp\beta$，$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则 $a\perp b$，故 B 正确；若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$，则 α,β 平行或相交，故 C 错误；若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$a\perp b$，则 α,β 平行或相交，故 D 正确.

10. ACD 【解析】因为 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\cdot\sin^2\dfrac{A+C}{2}=b\cdot\sin A$，所以由 $A+B+C=\pi$ 及正弦定理得，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A\cdot\sin^2\dfrac{\pi-B}{2}=\sin B\cdot\sin A$，由诱导公式得，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A\cdot\cos^2\dfrac{B}{2}=\sin B\cdot\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，故 $\sin A\neq 0$，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos^2\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$，化简得 $\cos\dfrac{B}{2}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{B}{2}-\cos\dfrac{B}{2}\right)=0$，即 $\cos\dfrac{B}{2}\sin\left(\dfrac{B}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\cos\dfrac{B}{2}=0$ 或 $\sin\left(\dfrac{B}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，即 $B=\pi$（舍）或 $B=\dfrac{\pi}{3}$，故 A 正确；由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $25=16+c^2-8\times c\times\dfrac{1}{2}$，得 $c^2-4c-9=0$，由 $\Delta=(-4)^2-4\times(-9)=52>0$，所以 $c=2+\sqrt{13}$（负值舍），即 $\triangle ABC$ 有一解，故 B 错误；因为 $a-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$，两边平方得 $a^2-2ac+c^2=\dfrac{b^2}{3}$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，由两式消 b^2 得，$2a^2-5ac+2c^2=0$，解得 $a=2c$ 或 $c=2a$（舍），由 $B=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，解得 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故 C 正确；因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos A+\cos C=\cos A+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$，因为 $A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，故 D 正确.

11. ABD 【解析】设曲线 C_2 上任意一点 $M(x,y)$，



由曲线 C_2 定义可知，x,y 满足 $\sqrt{x^2+(y+1)^2}+|y-1|=4$，

移项，平方可得：$x^2+(y+1)^2=(4-|y-1|)^2=16-8|y-1|+(y-1)^2$，

即 $x^2=16-4y-8|y-1|=\begin{cases}-12y+24,y\geqslant 1,\\4y+8,y<1,\end{cases}$ 由两条抛物线的一部分组成，故 A 正确；

点 F 和直线 $y=5$ 分别为抛物线 $x^2=-12y+24$ 的焦点和准线，由抛物线定义可知 B 正确；

设直线 l 与 y 轴夹角为 θ，点 F 同时为抛物线 $x^2=-12y+24$ 和椭圆 C_1 的焦点，$p=6$，$|AB|=|AF|-|BF|=\dfrac{6}{1+\cos\theta}-\dfrac{3}{2-\cos\theta}=\dfrac{5}{6}$，解得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，则 $k_l=-\dfrac{4}{3}$，故 C 错误；易知点 F 为抛物线 $x^2=4y+8$ 和 $x^2=-12y+24$ 的焦点，前者 $p=2$，后者 $p=6$，AF,DF 分别为两个抛物线的较短的焦半径，因此 $|AF|=\dfrac{6}{1+\cos\theta}$，$|DF|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$，$|AF|=3|DF|$，由于 $S_{\triangle AFE}=3S_{\triangle DFG}$，则 $d_{E-l}=d_{G-l}$，因此 $EG/\!/l$，所以 $k_l=k_{EG}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确.

三、填空题

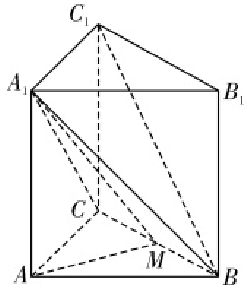
12. 6 【解析】二项式 $\left(x+\dfrac{1}{x^5}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 展开式的通项为：$T_{k+1}=C_n^kx^{n-k}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)^k=C_n^kx^{n-6k}(n,k\in\mathbf{N}^*)$，$\because$ 二项式 $\left(x+\dfrac{1}{x^5}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 展开式中含有常数项，$\therefore n-6k=0(n,k\in\mathbf{N}^*)$ 有解，$\therefore n=6k(n,k\in\mathbf{N}^*)$，则当 $k=1$ 时，n 最小，且最小值为 6.

13. $\dfrac{16}{21}$ 【解析】设第一次投篮成功为事件 B，通过测试为事件 A，则 $P(A|B)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}P(A|B)$，$P(A|\overline{B})=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}P(A|\overline{B})$，所以 $P(A|B)=\dfrac{6}{7}$，$P(A|\overline{B})=\dfrac{4}{7}$，所以 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{7}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{16}{21}$.

14. $(-1,1)$ 【解析】函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=x^2+e^{-x}+e^x=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，又当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$0<e^{-x}<1$，所以 $f'(x)=e^x-e^{-x}+2x>0$，所以 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以不等式 $f(ax)<f(x^2-x+1)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，转化为 $|ax|<x^2-x+1$，即 $-x^2+x-1<ax<x^2-x+1$，所以 $x^2+(a-1)x+1>0$ 且 $x^2-(a+1)x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，①若 $x^2+(a-1)x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta_1=(a-1)^2-4<0$，解得 $-1<a<3$；②若 $x^2-(a+1)x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta_2=(a+1)^2-4<0$，解得 $-3<a<1$，综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-1,1)$.

四、解答题

15.【解析】(1)取 BC 的中点 M，连接 MA，MA_1.



因为 $AB=AC$，$A_1B=A_1C$，所以 $BC\perp AM$，$BC\perp A_1M$，

因为 AM，$A_1M\subset$ 平面 A_1MA，且 $AM\cap A_1M=M$，

所以 $BC\perp$ 平面 A_1MA，

因为 $A_1A\subset$ 平面 A_1MA，所以 $BC\perp A_1A$，

又因为 $A_1A/\!/B_1B$，所以 $B_1B\perp BC$，

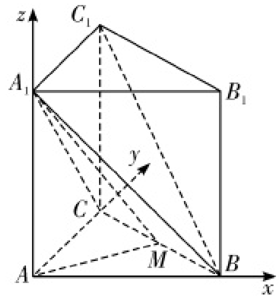
因为平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC，平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$，且 $B_1B\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $B_1B\perp$ 平面 ABC，

因为 $A_1A/\!/B_1B$，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC. …………………………………………………………… 6 分

(2)**法一**：因为 $\angle BAC=90^\circ$，且 $BC=2$，所以 $AB=AC=\sqrt{2}$.

以 AB，AC，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A_1(0,0,2)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$C_1(0,\sqrt{2},2)$.

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,\sqrt{2},0)$.

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-2z_1=0,\\ \sqrt{2}y_1-2z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，

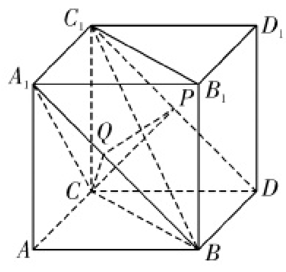
设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2-2z_2=0,\\ \sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$，

设平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 13 分

法二：将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成长方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$.



连接 C_1D，过点 C 作 $CP\perp C_1D$，垂足为 P，再过点 P 作 $PQ\perp A_1B$，垂足为 Q，连接 CQ，

因为 $BD\perp$ 平面 CDD_1C_1，且 $CP\subset$ 平面 CDD_1C_1，

所以 $BD\perp CP$，

又因为 $CP\perp C_1D$，由于 BD，$C_1D\subset$ 平面 A_1BDC_1，且 $BD\cap C_1D=D$，

所以 $CP\perp$ 平面 A_1BDC_1，则 $\triangle CPQ$ 为直角三角形，

由于 $A_1B\subset$ 平面 A_1BDC_1，所以 $A_1B\perp CP$，

因为 CP，$PQ\subset$ 平面 CPQ，且 $CP\cap PQ=P$，所以 $A_1B\perp$ 平面 CPQ，

因为 $CQ\subset$ 平面 CPQ，所以 $CQ\perp A_1B$，

则 $\angle CQP$ 为平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 的夹角或补角，

在 $\triangle A_1BC$ 中，由等面积法可得 $CQ=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$，

因为 $PQ=A_1C_1=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle CQP=\dfrac{PQ}{CQ}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

因此平面 A_1BC 与平面 A_1BC_1 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 13 分

16.【解析】(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln\dfrac{2x-1}{x-2}$，定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$，

其定义域关于 $x=\dfrac{5}{4}$ 对称，

则 $f(x)+f\left(\dfrac{5}{2}-x\right)=\ln\dfrac{2x-1}{x-2}+\ln\dfrac{2\left(\dfrac{5}{2}-x\right)-1}{\dfrac{5}{2}-x-2}$

$=\ln\dfrac{2x-1}{x-2}+\ln\dfrac{4-2x}{\dfrac{1}{2}-x}=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\cdot\dfrac{4-2x}{\dfrac{1}{2}-x}\right)=2\ln 2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的对称中心是$\left(\dfrac{5}{4},\ln 2\right)$. …………………………………… 6 分

(2)由 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{9}x=\ln\dfrac{ax-1}{x-a}+\dfrac{1}{9}x$，

因为 $a>1$，所以 $a>\dfrac{1}{a}$，所以 $g(x)$ 的定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\cup(a,+\infty)$，

则 $g'(x)=\dfrac{x-a}{ax-1}\cdot\dfrac{1-a^2}{(x-a)^2}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1-a^2}{(ax-1)(x-a)}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{(ax-1)(x-a)+9-9a^2}{9(ax-1)(x-a)}$，

由题可得 $g'(x)\leqslant 0$ 在区间 (a,a^2+a-1) 上恒成立，

则 $(ax-1)(x-a)+9-9a^2\leqslant 0$ 在区间 (a,a^2+a-1) 上恒成立，

则 $\begin{cases}a>1,\\9-9a^2\leqslant 0,\\ [a(a^2+a-1)-1]\cdot(a^2-1)+9-9a^2\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $1<a\leqslant 2$，

故实数 a 的取值范围为 $(1,2]$. …………………………………… 15 分

17.【解析】(1)$P(3)=\dfrac{C_3^1+A_3^3}{3^3}=\dfrac{1}{3}$，$P(4)=\dfrac{C_3^1+C_4^2A_3^3}{3^4}=\dfrac{13}{27}$. …………………………………… 4 分

(2)由于平局的情况比较多，我们可以考虑 n 人玩游戏分出胜负的概率 $\overline{P}$，

$\overline{P}=\dfrac{C_3^1(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})}{3^n}=\dfrac{3(2^n-2)}{3^n}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$，

其中 C_3^1 表示分出胜负的三种情况，即 n 人只出了①石头，剪刀；②石头，布；③剪刀，布，此时分胜负，

而分出胜负与平局是对立事件，故 $P=1-\overline{P}=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$. …………………………………… 9 分

(3)**法一**：5 人玩 2 轮游戏，在第 2 轮决出唯一获胜者的情况有以下几种，

情形一：第一轮平局，第二轮决出唯一获胜者.

此时 $P_1=\left(1-\dfrac{2^5-2}{3^4}\right)\cdot\left(\dfrac{C_5^1\cdot C_3^1}{3^5}\right)=\dfrac{51}{3^4}\times\dfrac{5}{3^4}=\dfrac{85}{3^7}$；

情形二：第一轮淘汰 1 位游戏者，第二轮淘汰 3 位游戏者，决出唯一获胜者.

此时 $P_2=\left(\dfrac{C_5^1\cdot C_3^1}{3^5}\right)\cdot\left(\dfrac{C_3^1\cdot C_4^3}{3^4}\right)=\dfrac{5}{3^4}\times\dfrac{4}{3^3}=\dfrac{20}{3^7}$；

情形三：第一轮淘汰 2 位游戏者，第二轮淘汰 2 位游戏者，决出唯一获胜者.

此时 $P_3=\left(\dfrac{C_5^2\cdot C_3^1}{3^5}\right)\cdot\left(\dfrac{C_3^1\cdot C_3^2}{3^3}\right)=\dfrac{10}{3^4}\times\dfrac{9}{3^3}=\dfrac{90}{3^7}$；

情形四：第一轮淘汰 3 位游戏者，第二轮淘汰 1 位游戏者，决出唯一获胜者.

此时 $P_4=\left(\dfrac{C_5^3\cdot C_3^1}{3^5}\right)\cdot\left(\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{3^2}\right)=\dfrac{10}{3^4}\times\dfrac{18}{3^3}=\dfrac{180}{3^7}$.

综上所述：$Q=P_1+P_2+P_3+P_4=\dfrac{85+20+90+180}{3^7}=\dfrac{375}{3^7}=\dfrac{125}{729}$. …………………………………… 15 分

法二：记 $P(n,m)$ 表示 n 个人玩一轮游戏，恰好剩 m 人的概率，

当 $m<n$ 时，$P(n,m)=\dfrac{C_3^1C_n^m}{3^n}=\dfrac{C_n^m}{3^{n-1}}$；

当 $m=n$ 时，$P(n,m)=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$；

5 人 2 轮游戏决出唯一获胜者的概率 Q,

$Q=P(5,5)P(5,1)+P(5,4)P(4,1)+P(5,3)P(3,1)+P(5,2)P(2,1)$

$=\left(1-\frac{2^5-2}{3^4}\right)\cdot\frac{C_5^1}{3^4}+\frac{C_5^1}{3^4}\cdot\frac{C_4^1}{3^3}+\frac{C_5^3}{3^4}\cdot\frac{C_3^1}{3^2}+\frac{C_5^2}{3^4}\cdot\frac{C_2^1}{3^1}=\frac{375}{3^7}=\frac{125}{729}$. ………………………………………… 15 分

18.【解析】(1)设 $P(x,y)$,由 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$,得$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}$,整理得$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

因为点 P 异于点 A,B,所以曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq0)$. ………………………………………… 3 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$,$E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,则 $m\neq\pm2$.

联立方程组$\begin{cases}y=x+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$整理得 $5x^2+8mx+4m^2-4=0$,

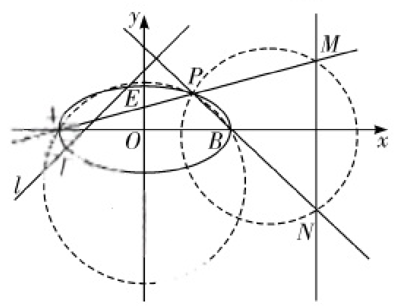
则 $\Delta=(8m)^2-20(4m^2-4)=80-16m^2>0$,即 $m^2<5$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{8m}{5}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{5}$,

则 $|EF|=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{80-16m^2}}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$,满足题意,

所以直线 l 的方程为 $y=x\pm\sqrt{2}$. ………………………………………… 9 分

(3)设直线 PA 的方程为 $y=k(x+2)$,则直线 PB 的方程为 $y=-\frac{1}{4k}(x-2)$.



令 $x=4$,得 $M(4,6k)$,同理得 $N\left(4,-\frac{1}{2k}\right)$,则 $|MN|=\left|6k+\frac{1}{2k}\right|=6|k|+\frac{1}{2|k|}$.

在$\triangle PMN$ 中,由正弦定理知 $r_1=\frac{|MN|}{2\sin\angle MPN}$,同理可得 $r_2=\frac{|AB|}{2\sin\angle APB}$.

因为$\angle MPN+\angle APB=\pi$,所以 $\sin\angle MPN=\sin\angle APB$,

从而$\frac{r_1}{r_2}=\frac{|MN|}{|AB|}=\frac{6|k|+\frac{1}{2|k|}}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$时等号成立,

故$\frac{r_1}{r_2}$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 17 分

19.【解析】(1)由题意可 $S_3=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3),x_i\in\{0,1\},i=1,2,3\}$,

S_3 中的元素有(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1),共 8 个,

从 8 个元素中任选两个元素有 $C_8^2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$ 种,

其中向量(0,0,0)和剩下 7 个向量的数量积均为 0,有 7 种情况;

(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)这 3 个向量中任选两个,它们的数量积均为 0,有 3 种情况;

(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)这 3 个向量分别和(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)的数量积为 0,有 3 种情况,

则满足 $X=0$ 的情况共有 $7+3+3=13$ 种,

所以 $P(X=0)=\frac{13}{28}$. ………………………………………… 5 分

(2)$M=\{(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$,$M$ 中一共有 $n+1$ 个元素,此时 M 中元素个数是最多的.

理由如下:

假设 M 中除了$(0,0,\cdots,0)$外还有 $n+1$ 个元素,

则根据集合中元素的互异性，这些元素中至少含有 $n+1$ 个"1"，

所以一定存在两个元素 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in M$，

这两个向量之中的某一个分量同时为 1，

即存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $a_ib_i=1$，此时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，与题设矛盾，

故集合 M 中至多有 $n+1$ 个元素. …………………………………………………………………… 11 分

(3)对于 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n$，令 $\boldsymbol{a}'=(1-a_1,1-a_2,\cdots,1-a_n)$，

定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}'$ 是一组"互补向量"，

若 $\boldsymbol{a}\in S_n$，则 $\boldsymbol{a}'\in S_n$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(1-a_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_i^2)=0$，

所以对于集合 $T\subseteq S_n$，若 $\boldsymbol{a}\in T$，则 $\boldsymbol{a}'\notin T$，

因为若 $\boldsymbol{a}\in T$ 且 $\boldsymbol{a}'\in T$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'=0$，

与已知 $\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，矛盾，

而 S_n 中元素个数为 2^n 个，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}'$ 成对出现，

所以集合 T 中的元素个数至多为 $\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}$ 个，即集合 T 中至多有 2^{n-1} 个元素.

下面给出一种集合 T 中有 2^{n-1} 个元素的取法：

在每一组"互补向量"中，我们始终取"1"的个数较多的那个向量作为集合 T 中的元素，这样就能保证 $\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，

证明如下：

①若 $n=2k+1$，$k\in\mathbf{N}^*$，则每一组"互补向量"里被选出来的向量都至少含有 $k+1$ 个"1"，

可知 T 中任意两个向量里都至少有一个相同位置含有"1"，符合题意.

②若 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$，按照前面的选法，选出的"1"的个数大于 k 的向量与其他组被选出的向量的数量积都大于 0，所以我们只需要考虑那些恰好含有 k 个"1"的"互补向量"组.

事实上，每一个恰好含有 k 个"1"的向量只与自身的"互补向量"的数量积为 0，而与其他的含有 k 个"1"的向量的数量积均大于 0.

所以对于由两个恰好含有 k 个"1"的向量构成的"互补向量"组，我们就从这两个向量中任选一个作为集合 T 中的元素，这样的选法仍是选出了 2^{n-1} 个向量作为 T 中的元素. …………………………………… 17 分